Algebra

Übungsblatt 10

Prof. Dr. Markus Land
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2022/2023
09.01.2023

Aufgabe 1. Sei $n \geq 1$, p eine Primzahl und $m \geq 1$ sodass m nicht von p geteilt wird. Sei $1 \leq s \leq n$.
(1) Zeige, dass $p^{n-s+1} \nmid \binom{m \cdot p^n}{p^s}$.
(2) Beweise oder widerlege, dass $p^{n-s} \mid \binom{m \cdot p^n}{p^s}$.

Aufgabe 2. Sei G eine Gruppe, $H \subseteq G$ eine Untergruppe und $N \subseteq G$ ein Normalteiler. Zeige:
(1) Ist G auflösbar, so sind auch H und G/N auflösbar.
(2) Sind N und G/N auflösbar, so ist auch G auflösbar.

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe mit $|G| = 33$ und X eine G-Menge mit $|X| = 19$. Zeige: Es existiert ein Fixpunkt in X (d.h. $X^G \neq \varnothing$).

Aufgabe 4. Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Betrachte die Operation von $\mathrm{GL}_n(K)$ auf K^n. Bestimme den Stabilisator von $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K^n$.

Aufgabe 5. Seien p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p$ ein Körper mit p Elementen.
Zeige:
$$|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)| = \prod_{i=0}^{n-1} (p^n - p^i)\,.$$
Hinweis: Benutze die Induktion nach n und Aufgabe 3.

Übungsblatt 10

Aufgabe 1

$x \in \mathbb{Q}$, $\quad x = \prod_{p \in P} p^{v_p(x)}$. Es gilt $\forall x,y \in \mathbb{Q}$: $\quad \bullet\ v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$

$\bullet\ v_p(xy^{-1}) = v_p(x) - v_p(y)$

Z.z.: $\quad v_p\left(\binom{mp^n}{p^s}\right) = n - s$

$$\binom{mp^n}{p^s} = \frac{(mp^n)!}{(mp^n-p^s)!\,p^s!} = \frac{mp^n(mp^n-1)\cdot\ldots\cdot(mp^n-(p^s-1))}{p^s!} =$$

$$= \frac{mp^n}{p^s}\,\frac{(mp^n-1)}{1}\,\frac{(mp^n-2)}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{(mp^n-(p^s-1))}{p^s-1} =$$

$$= mp^{n-s} \cdot \prod_{i=1}^{p^s-1} \frac{mp^n-i}{i}$$

$$v_p\left(\binom{mp^n}{p^s}\right) = (n-s) + \sum_{i=1}^{p^s-1} v_p(mp^n-i) - v_p(i)$$

Z.z.: $\quad \forall i = 1, \ldots, p^s-1 \quad v_p(mp^n-i) = v_p(i)$

Sei $\ell = v_p(i) < s \leq n$ (da $i < p^s$) und $i = p^\ell a$ mit $g.g.T(p,a) = 1$

Dann $\quad mp^n - i = mp^n - p^\ell a = p^\ell(\underbrace{p^{n-\ell}m - a}_{\text{teilerfremd mit } p, \text{ sonst } p \mid a.})$

$\Rightarrow \quad v_p(mp^n-i) = \ell = v_p(i)$

Aufgabe 2

(1) G auflösbar, dann $\exists \{e\} = G_0 \lhd G_1 \lhd \dots \lhd G_{i-1} \lhd G_i \lhd \dots \lhd G_n = G$

mit G_i / G_{i-1} abelsch für $i = 1, \dots, n$

Sei H eine Untergruppe von G.

Wir betrachten $H_i = H \cap G_i$ für $i = 0, 1, \dots, n$.

Dann $H_{i-1} = H \cap G_{i-1} = H_i \cap G_{i-1}$ $(= (H \cap G_i) \cap G_{i-1} = H \cap G_{i-1}))$.

$G_{i-1} \lhd G_i$ und H_i eine UG von G_i.

Nach Satz 1.14 (1. Isomorphiesatz):

$$H_{i-1} = H_i \cap G_{i-1} \lhd H_i$$

und

$$H_i / H_{i-1} = H_i / H_i \cap G_{i-1} \simeq \underbrace{H_i G_{i-1} / G_{i-1}}_{\text{abelsch}} \subseteq \underbrace{G_i / G_{i-1}}_{\text{abelsch}}$$

$\Longleftarrow$

Es folgt: H ist auflösbar.

(2) z.z.: G/N ist auflösbar

$$\left.\begin{matrix} N \lhd G \\ G_i \lhd G \end{matrix}\right\} \underset{\text{Satz 1.14}}{\Longrightarrow} G_i N \lhd G \Longrightarrow ~~G_i \lhd N G_{i+1}~~ \quad G_i N \lhd G_{i+1} N$$

Wir bekommen

$$N = G_0 N \lhd G_1 N \lhd \dots \lhd G_n N = G.$$

Dann

$$N/N = G_0 N / N \lhd \dots \lhd G_i N / N \lhd \dots \lhd G_n N / N = G/N$$

$$\pi : G/N \longrightarrow N, \qquad G_i N / N := \pi(G_i N) \text{ Untergruppe von } G/N$$

$$(G_i N / N) / (G_{i-1} N / N) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 1.14} \\ \text{(2. Isomorphiesatz)}}}{\simeq} G_i N / G_{i-1} N \simeq G_i \cdot (G_{i-1} N) / G_{i-1} N$$

1. Isomorphiesatz

$$\simeq G_i / G_i \cap (G_{i-1} N)$$

$$\underset{\text{abelsch}}{G_i / G_{i-1}} \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow G_i / G_i \cap (G_{i-1} N)$$

abelsch $\Rightarrow$ abelsch.

(2) $\pi : G \longrightarrow G/N$

Es gibt eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Untergruppen} \\ \tilde{H} \subset G/N \end{array} \right\} \underset{H/N \longleftarrow H}{\xrightarrow{\tilde{H} \longmapsto \pi^{-1}(\tilde{H})}} \left\{ \begin{array}{l} \text{Untergruppen} \\ H \subset G \text{ mit } N \subset H \end{array} \right\}$$

$$H/N = \tilde{H} \triangleleft G/N \quad \Longleftrightarrow \quad H \triangleleft G.$$

G/N auflösbar $\Rightarrow \exists \; \{e\} = N/N = \tilde{H}_0 \triangleleft \tilde{H}_1 \triangleleft \dots \triangleleft \tilde{H}_k = G/N$

$$\tilde{H}_0 = H_0/N, \quad \tilde{H}_1 = H_1/N, \quad \tilde{H}_k = H_k/N$$

mit

$$N = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_k = G$$

Satz 1.14 (2. Isomorphiesatz)

$\Downarrow$

$$(H_i/N) / (H_{i-1}/N) \simeq H_i / H_{i-1} \quad \text{abelsch}$$

$$\underbrace{\text{Auflösbare Reihe für } N \; + \; N = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_k = G}$$

$\Downarrow$

G ist auflösbar

Aufgabe 3

Sei $x \in X$

Nach Lemma 5.6 $|\vartheta_x| = \frac{|G|}{|G_x|}$ teilt $|G| = 33$

$\Rightarrow |\vartheta_x| = 1, 3, 11$ oder 33

$x \in X^G \iff \vartheta_x = \{x\} \iff |\vartheta_x| = 1$

Angenommen, dass $X^G = \emptyset$, dann $|\vartheta_x| \neq 1$

$|\vartheta_x| \neq 33$, da $\vartheta_x \subset X$ und $|X| = 19 < 33$

Es folgt dass $|\vartheta_x| = 3$ oder 11

Nach Lemma 5.6 $19 = |X| = \sum_{\text{Bahnen}} |\vartheta_x| = 3a + 11b$, $a, b \in \mathbb{N}_0$

$b = 0$ oder 1, aber $\begin{matrix} 19 \neq 3a \\ 19 \neq 3a + 11 \end{matrix}$ $\lightning$ $X^G \neq \emptyset$.

Aufgabe 4

$G = GL_n(K)$

$A \in GL_n(K)$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ $\qquad A \circ X = AX$

$AX = \underbrace{(A_1\ A_2\ \dots\ A_n)}_{\text{Spalten von } A} X = A_1 x_1 + \dots + A_n x_n$

$Ae_1 = A_1$

$G_{e_1} = \{ A \in GL_n(K) \mid \underset{A_1}{\overset{\shortparallel}{Ae_1}} = e_1 \} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in GL_n(K) \right\}$

solche Matrix $\in GL_n(K)$

$\Leftrightarrow A' \in GL_{n-1}(K)$

Aufgabe 5

$G = GL_n(\mathbb{F}_p)$

Induktion nach n.

$n=1$ $\quad |GL_1(\mathbb{F}_p)| = |\mathbb{F}_p^\times| = p-1 = \prod_{i=0}^{0} (p^1 - p^i)$

Angenommen, dass die Formel gilt für $n-1$ und zeigen für n.

Sei $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_p^n$

$\mathcal{O}_{e_1} = \mathbb{F}_p^n \setminus \{0\} \Rightarrow |\mathcal{O}_{e_1}| = p^n - 1$

Nach Lemma 5.6 : $|\mathcal{O}_{e_1}| = \frac{|G|}{|G_{e_1}|} \Rightarrow |G| = |\mathcal{O}_{e_1}| \cdot |G_{e_1}| = (p^n - 1)\,|G_{e_1}|$

Es folgt nach Aufgabe 4 :

$|G_{e_1}| = p^{n-1} \cdot |GL_{n-1}(\mathbb{F}_p)| \underset{\text{Induktion}}{=} p^{n-1} (p^{n-1} - 1)(p^{n-1} - p) \cdot \ldots \cdot (p^{n-1} - p^{n-2}) =$

$= (p^n - p) \cdot (p^n - p^2) \cdot \ldots \cdot (p^n - p^{n-1})$

Dann $|G| = (p^n - 1) \cdot (p^n - p) \cdot \ldots \cdot (p^n - p^{n-1}) = \prod_{i=0}^{n-1} (p^n - p^i)$