Algebra

Übungsblatt 1

Prof. Dr. Markus Land
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2022/2023
24.10.2022

Aufgabe 1. Seien G eine Gruppe und $\varphi, \psi : G \to G$ definiert durch $\varphi(g) = g^2$ und $\psi(g) = g^{-1}$..
(1) Zeige: φ ist ein Gruppenhomomorphismus genau dann, wenn G abelsch ist.
(2) Zeige: ψ ist ein Gruppenhomomorphismus genau dann, wenn G abelsch ist.
(3) Zeige: $\psi : G \to G^{\mathrm{op}}$ ist ein Gruppenisomorphismus.

Aufgabe 2. Seien X eine Menge, M die Menge aller Abbildungen von X nach X und $S(X)$ die Menge aller bijektiven Abbildungen von X nach X. Bezüglich der Komposition ist M ein Monoid.
Zeige: $S(X) = M^*$.
Falls $|X| = n < \infty$, was ist $|S(X)|$?

Aufgabe 3. Sei X eine Menge und sei für jedes $x \in X$ ein Monoid (eine Gruppe) M_x gegeben.
(1) Zeige: für jedes $y \in X$ ist die Projektion $pr_y : \prod_{x\in X} M_x \to M_y$ ein Monoidhomomorphismus (Gruppenhomomorphismus).
(2) Sei A ein Monoid (eine Gruppe). Zeige: die induzierte Abbildung

$$\mathrm{Hom}(A, \prod\nolimits_{x\in X} M_x) \to \prod\nolimits_{x\in X} \mathrm{Hom}(A, M_x)\,,$$
$$\varphi \mapsto (pr_x \circ \varphi)_{x\in X}\,,$$

ist eine Bijektion, wobei Hom die Menge der Monoidhomomorphismen bezeichne.

Aufgabe 4. (1) Sei G eine Gruppe und $Z(G)$ das Zentrum von G, wobei

$$Z(G) = \{g \in G \mid gh = hg \text{ für alle } h \in G\}\,.$$

Zeige: $Z(G)$ ist eine abelsche Untergruppe von G.
(2) Seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.
Zeige: $Z(\mathrm{GL}_n(K)) = \{aE_n \in \mathrm{GL}_n(K) \,|\, a \in K^*\}$, wobei E_n die Einheitsmatrix ist.