Übungsblatt 1

Aufgabe 1

(1) Seien $a, b \in G$

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\cdot\varphi(b)$$
$$\Updownarrow$$
$$(ab)^2 = a^2 \cdot b^2$$
$$\Updownarrow$$
$$abab = a^2 b^2$$
$$\Updownarrow$$
$$a^{-1}(abab)b^{-1} = a^{-1}(a^2b^2)b^{-1}$$
$$\Updownarrow$$
$$ba = ab$$

~~gilt $\forall a, b \in G$~~

φ ist ein Gruppenhom $\iff \forall a, b \in G \quad \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$

$$\Updownarrow$$
$$\forall a, b \in G \qquad ab = ba$$
$$\Updownarrow$$

G ist abelsch

(2)
$$\psi(ab) = \psi(a)\psi(b) \iff (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1} \quad \cancel{\iff b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}}$$
$$\Updownarrow$$
$$((ab)^{-1})^{-1} = (a^{-1}b^{-1})^{-1} \iff ab = ba$$

(3) $G^{op} = \{ a_{op} \mid a \in G \}$ und es gilt in G^{op}:

$$\psi : G \to G^{op}, \quad a \mapsto a_{op}^{-1}$$

$$\underset{\text{in } G^{op}}{a_{op} \circ b_{op}} = \underset{\text{in } G}{(b \cdot a)_{op}}$$

$$\psi(ab) = (ab)_{op}^{-1} = (\underset{\text{in } G}{b^{-1} \cdot a^{-1}})_{op} = \underset{\text{in } G^{op}}{a_{op}^{-1} \circ b_{op}^{-1}} = \psi(a)\cdot\psi(b)$$

Aufgabe 2

Zu zeigen: $S(X) = M^*$

"$\supset$" Sei $\varphi \in M^* = \{$ alle invertierbare Abbildungen $X \to X \}$ bzgl Komposition

Dann $\exists\ \psi = \varphi^{-1} \in M$ mit $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = id_X$

- $\forall x \in X$ gilt $x = \varphi(\psi(x)) \Rightarrow \varphi$ ist surjektiv
  (da $id_X = \varphi \circ \psi$)

- Falls $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, dann $x_1 = \psi(\varphi(x_1)) = \psi(\varphi(x_2)) = x_2$
  Es folgt: φ ist injektiv und dann bijektiv
  $\Downarrow$
  $\varphi \in S(X)$

"$\subset$" Sei $\varphi : X \to X$ eine bijektive Abbildung ($\varphi \in S(X)$)

Wir konstruieren ψ (Inverse von φ) wie so:

Sei $x \in X$. $\exists\ x' \in X$ mit $\varphi(x') = x$, da φ surjektiv ist.

Wir definieren, $\psi(x) := x'$

Wohl definiert, da $x' \in X$ eindeutig ist (φ ist injektiv)

Dann $\varphi(\psi(x)) = x \quad \forall x \in X$ nach der Konstruktion.

$\cancel{\psi(\varphi(x)) = x}$ Sei $x \in X$: Dann gilt $\cancel{\varphi(\psi(x)) = x}$

$$\varphi(x) = \varphi(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\underbrace{(\varphi \circ \psi)}_{id_X} \circ \varphi(x) = \varphi(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\varphi(\psi(\varphi(x))) = \varphi(x)$$
$$\Updownarrow \text{ da } \varphi \text{ injektiv ist}$$
$$\psi(\varphi(x)) = x$$

Es folgt: $\psi \circ \varphi = id_X \Rightarrow \psi = \varphi^{-1}$ und $\varphi \in M^\times$

Aufgabe 3

(1)

Seien $a = (a_x)_{x \in X}$, $b = (b_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} M_x$,

wobei $a_x, b_x \in M_x \quad \forall \, x \in X$.

$$pr_y(a \cdot b) = pr_y\left((a_x \cdot b_x)_{x \in X}\right) = a_y \cdot b_y = pr_y(a) \cdot pr_y(b).$$

(2) Wenn $(\varphi_x)_{x \in X} \in \operatorname{Hom}(A, M_x)$, definieren

wir
$$\varphi : A \longrightarrow \prod_{x \in X} M_x$$
$$a \longmapsto (\varphi_x(a))_{x \in X}$$

Denn $\Phi : \operatorname{Hom}(A, \prod_{x \in X} M_x) \to \prod_{x \in X} \operatorname{Hom}(A, M_x)$

ist surjectiv, da $\Phi(\varphi) = (\varphi_x)_{x \in X}$.

Seien $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}(A, \prod_{x \in X} M_x)$ und $\Phi(\varphi) = \Phi(\psi)$

$\Rightarrow \forall x \in X : \quad pr_x \circ \varphi = pr_x \circ \psi$

$\forall a \in A \quad \varphi(a) = \prod_{x \in X} \left((pr_x \circ \varphi)(a)\right) = \prod_{x \in X} \left((pr_x \circ \psi)(a)\right) = \psi(a)$

$\Rightarrow \quad \varphi = \psi$ als Monoidhom. $A \longrightarrow \prod_{x \in X} M_x$.

Aufgabe 4

(1) $\cdot\ e \in Z(G)$

Seien $g, g' \in Z(G)$, $h \in G$

$\cdot\ gg'h = ghg' = hgg' \Rightarrow gg' \in Z(G)$

$\cdot\ gh = hg \Rightarrow hg^{-1} = g^{-1}h$ Es folgt $g^{-1} \in Z(G)$

(2) Sei $A \in \cancel{Z(G)}.\ Z(GL_n(K))$ mit $a_{ji} \neq 0$ für $i \neq j$.

~~$E_{ij} = (e_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ mit~~

Sei $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, und $i \neq j$

Sei $E_{ij} = \begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ i,j - Element $= 1$ alle andere sind 0.

$E_{ij} \notin GL_n(K)$, aber $E_n + E_{ij} \in GL_n(K)$.

Dann $A \cdot (E_n + E_{ij}) = (E_n + E_{ij}) \cdot A = A + E_{ij} A$

$\parallel$

$A + A E_{ij}$

Es folgt: $A E_{ij} = E_{ij} A$ (**)

Wir vergleichen jj - Element : $a_{ji} = 0$ Widerspruch.

$\overset{*}{0}$

Es folgt dass $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$ diagonal ist.

~~Sei B~~ Wir vergleichen jetzt ij - Element in (**)

$\Downarrow$

$a_{ii} = a_{jj}$

Es folgt: $A = a E_n$ mit $a \in K^{\times}$.