

Algebra

Tutoriumsblatt 9

Prof. Dr. Markus Land
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2022/2023
21.12.2022

Aufgabe 1. Sei $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

(1) Zeige: L ist eine Galoiserweiterung von \mathbb{Q} .

(2) Zeige: $\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.

Seien $\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{2} \in L$ und $f \in \mathbb{Q}[X]$ das Minimalpolynom von α über \mathbb{Q} .

(3) Finde alle Nullstellen von f in L .

(4) Beschreibe die Wirkung von $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ auf der Menge aller Nullstellen von f .

Aufgabe 2. (1) Zeige, dass $L = \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$ der Zerfällungskörper von $X^4 - 2$ über \mathbb{Q} ist. Folgere dass L/\mathbb{Q} eine Galoiserweiterung ist.

(2) Zeige: $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ ist isomorph zur Diedergruppe D_4 (das ist die Symmetriegruppe eines Quadrats, D_4 hat 8 Elementen).

(3) Finde alle Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subset E \subset L$.