Algebra

Tutoriumsblatt 8

Prof. Dr. Markus Land — WiSe 2022/2023
Dr. Maksim Zhykhovich — 13.12.2022

Aufgabe 1. Seien p eine Primzahl, $a \in \mathbb{F}_p^*$ und $f = X^p - X - a \in \mathbb{F}_p[X]$. Sei g ein irreduzibler Teiler von f und $m = \operatorname{Grad} g$. Seien $L = \mathbb{F}_p[X]/(g)$ eine Körpererweiterung von $\mathbb{F}_p$ und α eine Nullstelle von g in L.
(1) Zeige: $\alpha^{p^m} = \alpha$ in L. *Hinweis:* Benutze Satz 1.18 aus der Vorlesung.
(2) Zeige: $\alpha^p = \alpha + a$ in L.
(3) Folgere aus (2), dass $\alpha^{p^k} = \alpha + ka$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
(4) Folgere aus (1) und (3), dass $m = p$ und f irreduzibel in $\mathbb{F}_p[X]$ ist.
(5) Zeige: $X^5 + 5X^3 - 6X + 2$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$.

Aufgabe 2. Seien K ein Körper, $f \in K[x]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ und L eine Körpererweiterung von K. Sei X die Menge aller Nullstellen von f in L.
(1) Zeige: $\operatorname{Aut}_K(L)$ wirkt auf X.
(2) Angenommen, L ist der Zerfällungskörper von f über K.
Zeige: $\operatorname{Aut}_K(L)$ ist isomorph zu einer Untergruppe von S_n.

Aufgabe 3. Sei $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.
(1) Zeige: L ist eine Galoiserweiterung von $\mathbb{Q}$.
(2) Zeige: $\operatorname{Gal}(L/\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.
Seien $\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{2} \in L$ und $f \in \mathbb{Q}[X]$ das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$.
(3) Finde alle Nullstellen von f in L.
(4) Beschreibe die Wirkung von $\operatorname{Gal}(L/\mathbb{Q})$ auf der Menge aller Nullstellen von f.