Algebra

Tutoriumsblatt 6

Prof. Dr. Markus Land
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2022/2023
23.11.2022

Aufgabe 1. (1) Zeige: $X^4 + 1$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$.
(2) Zeige: $X^4 + 1$ ist reduzibel in $\mathbb{F}_p[X]$ für jede Primzahl p.
Hinweis: Sie p eine Primzahl. Zeige zunächst, dass $X^4 + 1$ reduzibel in $\mathbb{F}_p[X]$ ist, wenn $\{-1, 2, -2\} \cap \mathbb{F}_p^{*2}$ nicht leer ist. Benutze Aufgabe 1.2, Tütoriumsblatt 3.

Aufgabe 2. Sei $K \subset L$ eine beliebige Körpererweiterung. Seien $\alpha, \beta \in L$. Angenommen, dass $\alpha + \beta$ und $\alpha\beta$ algebraisch über K sind. Zeige: α und β sind auch algebraisch über K.

Aufgabe 3. Sei $0 \neq b \in \mathbb{R}$, so dass $bi \in \mathbb{C}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$ ist ($i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$). Zeige: Der Grad der Körpererweiterung $|\mathbb{Q}(bi) : \mathbb{Q}|$ ist gerade.

Aufgabe 4. Sei $L \subset \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper des Polynoms $X^3 - 2$ über $\mathbb{Q}$.
(1) Zeige: $L = \mathbb{Q}[\alpha, \sqrt[3]{2}]$, wobei $\alpha = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \in \mathbb{C}$.
(2) Zeige: $[L : \mathbb{Q}] = 6$.