

Algebra

Tutoriumsblatt 3

Prof. Dr. Markus Land
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2022/2023
09.11.2022

Aufgabe 1. Seien p eine ungerade Primzahl, $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Körper mit p Elementen, $\mathbb{F}_p^* = \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ und $\mathbb{F}_p^{*2} := \{x^2 \mid x \in \mathbb{F}_p^*\}$.

(1) Zeige: \mathbb{F}_p^{*2} ist eine Untergruppe von \mathbb{F}_p^* mit Index 2.

(2) Seien $x, y \in \mathbb{F}_p$, sodass x, y keine Quadrate in \mathbb{F}_p sind.

Zeige: xy ist ein Quadrat in \mathbb{F}_p .

(3) Zeige: $x^{p-1} = 1$ für jedes $x \in \mathbb{F}_p^*$.

(4) Sei $x \in \mathbb{F}_p^*$. Zeige: x ist ein Quadrat in \mathbb{F}_p^* genau dann wenn $x^{\frac{p-1}{2}} = 1$.

(5) Für welche Primzahlen p ist -1 ein Quadrat in \mathbb{F}_p^* ?

Aufgabe 2. Ein Boolescher Ring R ist ein Ring, in dem $x^2 = x$ für alle x aus R gilt. Zeige:

(1) Es gilt $2x = 0$ für alle $x \in R$.

(2) R ist kommutativ.

(3) Jedes endlich erzeugte Ideal von R ist ein Hauptideal.

Aufgabe 3. Sei R ein assoziativer (nicht kommutativer) Ring. Seien $x, y \in R$ mit $1 - xy \in R^*$. Zeige mit Hilfe der Taylor-Entwicklung, dass $1 - yx \in R^*$.