

Algebra

Tutoriumsblatt 13

Prof. Dr. Markus Land
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2022/2023
01.02.2023

Aufgabe 1. Sei G eine Gruppe mit $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ Elementen.

Zeige: Die Gruppe G ist nicht einfach.

Hinweis: Betrachte die Wirkung von G auf der Menge ihrer 5-Sylowuntergruppen durch Konjugation.

Aufgabe 2. Sei G eine Gruppe. Ein Kommutator in G ist ein Element der Form $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$, wobei $a, b \in G$. Sei

$$[G, G] = \{g \in G \mid g = \text{endliches Produkt von Kommutatoren aus } G\}.$$

(1) Zeige: $[G, G]$ ist eine normale Untergruppe von G . Diese Gruppe heißt die *Kommutatorgruppe von G* .

(2) Zeige: Die Faktorgruppe $G_{\text{ab}} := G/[G, G]$ ist abelsch.

(3) Sei $\pi : G \rightarrow G_{\text{ab}}, x \mapsto x[G, G]$, die kanonische Projektion.

Zeige die universelle Eigenschaft von G_{ab} : für jeden Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \rightarrow A$ mit einer abelschen Gruppe A existiert es ein einziger Gruppenhomomorphismus $\tilde{\varphi} : G_{\text{ab}} \rightarrow A$, sodass $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi$.

(4) Zeige: $F : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ab}, G \mapsto G_{\text{ab}}$, ist ein Funktor, wobei \mathbf{Grp} die Kategorie der Gruppen und \mathbf{Ab} die Kategorie der abelschen Gruppen ist.

(5) Zeige: Der Vergissfunktorkomplex $U : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Grp}$ ist ein rechtsadjungierter von F .

Aufgabe 3. Seien $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $F' : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ Funktoren zwischen Kategorien.

Zeige: Haben F und F' rechtsadjungierte G und G' , so ist $G \circ G'$ ein rechtsadjungierter von $F' \circ F$.