

Algebra

Tutoriumsblatt 12

Prof. Dr. Markus Land
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2022/2023
25.01.2022

Aufgabe 1. Sei G eine Gruppe mit $|G| = 12$.

Zeige: G enthält eine Sylowuntergruppe, die in G normal ist.

Aufgabe 2. Seien G eine endliche Gruppe, p eine Primzahl, n_p die Anzahl der p -Sylowuntergruppen von G und P eine p -Sylowuntergruppe.

(1) Zeige: $n_p = |G : N_G(P)|$, wobei $N_G(P) = \{g \in G \mid gPg^{-1} = P\}$ den Normalisator von P bezeichnet.

Hinweis: Sei X die Menge aller p -Sylowuntergruppen in G . Betrachte die Wirkung von G auf X durch Konjugation.

(2) Finde die Anzahl n_p der p -Sylowuntergruppen in $GL_2(\mathbb{F}_p)$.

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe mit $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ Elementen.

Zeige: Die Gruppe G ist nicht einfach.

Hinweis: Betrachte die Wirkung von G auf der Menge ihrer 5-Sylowuntergruppen durch Konjugation.