

# Algebra

## Tutoriumsblatt 11

Prof. Dr. Markus Land  
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2022/2023  
18.01.2022

---

**Aufgabe 1.** Sei

$$H = \{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

die Untergruppe von  $S_4$

(1) Zeige:  $H$  ist eine normale Untergruppe von  $S_4$ .

(2) Zeige:  $S_4/H \simeq S_3$ .

*Hinweis:* Betrachte die Wirkung von  $S_4$  auf der Menge  $X := H \setminus \{\text{id}\}$  durch Konjugation und benutze den Homomorphismus  $S_4 \rightarrow S(X)$ .

**Aufgabe 2.** Seien  $G$  eine Gruppe und  $N$  eine normale Untergruppe von  $G$ .

(1) Sei  $S$  eine normale Untergruppe von  $N$ . Ist  $S$  normal in  $G$ ? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

*Hinweis:* Betrachte  $G = S_4$ ,  $N = H$  wie in der Aufgabe 1.

(2) Gleiche Frage, wenn  $N$  endlich ist und  $S$  eine normale Sylowuntergruppe von  $N$  ist.

**Aufgabe 3.** Sei  $p$  eine Primzahl und  $x \in \text{GL}_2(\mathbb{F}_p)$  ein Element der Ordnung  $p$ .

Zeige:  $x$  ist konjugiert zu einer Matrix der Form  $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  für ein  $a \in \mathbb{F}_p$ .

**Aufgabe 4.** Sei  $G$  eine Gruppe mit  $|G| = 12$ .

Zeige:  $G$  enthält eine Sylowuntergruppe, die in  $G$  normal ist.