

Algebra

Tutoriumsblatt 11

Prof. Dr. Markus Land
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2022/2023
18.01.2022

Aufgabe 1. Sei

$$H = \{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

die Untergruppe von S_4

(1) Zeige: H ist eine normale Untergruppe von S_4 .

(2) Zeige: $S_4/H \simeq S_3$.

Hinweis: Betrachte die Wirkung von S_4 auf der Menge $X := H \setminus \{\text{id}\}$ durch Konjugation und benutze den Homomorphismus $S_4 \rightarrow S(X)$.

Aufgabe 2. Seien G eine Gruppe und N eine normale Untergruppe von G .

(1) Sei S eine normale Untergruppe von N . Ist S normal in G ? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Betrachte $G = S_4$, $N = H$ wie in der Aufgabe 1.

(2) Gleiche Frage, wenn N endlich ist und S eine normale Sylowuntergruppe von N ist.

Aufgabe 3. Sei p eine Primzahl und $x \in \text{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ ein Element der Ordnung p .

Zeige: x ist konjugiert zu einer Matrix der Form $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für ein $a \in \mathbb{F}_p$.

Aufgabe 4. Sei G eine Gruppe mit $|G| = 12$.

Zeige: G enthält eine Sylowuntergruppe, die in G normal ist.