

# Algebra

## Tutoriumsblatt 10

Prof. Dr. Markus Land  
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2022/2023  
11.01.2022

---

**Aufgabe 1.** (1) Zeige, dass  $L = \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2})$  der Zerfällungskörper von  $X^4 - 2$  über  $\mathbb{Q}$  ist. Folgere dass  $L/\mathbb{Q}$  eine Galoiserweiterung ist.

(2) Zeige:  $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$  ist isomorph zur Diedergruppe  $D_4$  (das ist die Symmetriegruppe eines Quadrats,  $D_4$  hat 8 Elementen).

(3) Finde alle Zwischenkörper  $\mathbb{Q} \subset E \subset L$ .

**Aufgabe 2.** Sei  $G$  eine Gruppe mit 22 Elementen, die auf einer Menge  $X$  mit 11 Elementen ohne Fixpunkte wirkt. Zeige: Diese Wirkung ist transitiv.

**Aufgabe 3.** Sei

$$H = \{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

die Untergruppe von  $S_4$

(1) Zeige:  $H$  ist eine normale Untergruppe von  $S_4$ .

(2) Zeige:  $S_4/H \simeq S_3$ .

*Hinweis:* Betrachte die Wirkung von  $S_4$  auf der Menge  $X := H \setminus \{\text{id}\}$  durch Konjugation und benutze den Homomorphismus  $S_4 \rightarrow S(X)$ .