Einschub vor 6.31 (jetzt 6.33)

Definition 6.31 Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und I eine Kategorie. Wir sagen, dass $\mathcal{C}$ alle I-geformten (Ko)limits hat, falls jeder Funktor $F: I \to \mathcal{C}$ einen (Ko)limit hat. Für I wie in 6.30 1), 2), 3) sagen wir $\mathcal{C}$ hat alle (Ko)Produkte, Pushouts/Pullbacks, (Co)equalizer.
Hat $\mathcal{C}$ alle I-geformten (Ko)limits für alle kleinen Kategorien I so sagen wir $\mathcal{C}$ hat alle kleinen (Ko)limits oder $\mathcal{C}$ ist (Ko)vollständig.

Satz 6.32 Sei $\mathcal{C}$ klein und ~~vollständig~~ (hat kleine Koprodukte). Dann ist $\mathcal{C}$ äquivalent zu einem Poset. (der Kategorie welche einem Poset zugeordnet ist)

Beweis: Wir zeigen: $\forall X, Y \in \mathcal{C}$ ist $|\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)| \leq 1$.
⌈ definiere dann eine Relation auf $ob(\mathcal{C})$ durch $X \leq Y$ ~~falls~~ $\iff$ $|\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)| = 1$. Dies definiert eine reflexive + transitive ~~oper~~ Relation auf $ob(\mathcal{C})$ welche antisymmetrisch auf Isomorphieklassen ist. ~~Wo~~ Wählt man aus jeder Isomorphieklasse genau einen Vertreter und betrachtet die volle UK auf diesen, so ist diese Kat.
a) äquivalent zu $\mathcal{C}$ und b) einem Poset zugeordnet ⌋

Sei $Mor(\mathcal{C})$ die Menge aller Morphismen in $\mathcal{C}$, d.h.
$Mor(\mathcal{C}) = \coprod_{(X,Y) \in \mathcal{C}\times\mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$. ~~[illegible]~~ Angenommen $\exists X, Y \in \mathcal{C}$ st $|\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)| \geq 2$. Nach Voraussetzung gibt es das Koprodukt $\coprod_{Mor(\mathcal{C})} X$ in $\mathcal{C}$. Man hat dann

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\coprod_{Mor(\mathcal{C})} X, Y) \subseteq Mor(\mathcal{C})$ und daher $|\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\coprod_{Mor(\mathcal{C})} X, Y)| \leq |Mor(\mathcal{C})|$

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\coprod_{Mor(\mathcal{C})} X, Y) \cong \prod_{Mor(\mathcal{C})} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$

Außerdem gilt $\left|\prod_{Mor(\mathcal{C})} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\right| \geq \left|\prod_{Mor(\mathcal{C})} \{0,1\}\right| \overset{\text{Satz von Cantor}}{>} |Mor(\mathcal{C})|$ ↯ ∎

$$\lim_I F \cong \{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} F(i) \mid \forall \alpha: i\to j : F(\alpha)(x_i) = x_j\} \subseteq \prod_{i\in I} F(i).$$

analog ist ein Kolimit gegeben durch

$$\operatorname{colim}_I F = \Big(\coprod_{i\in I} F(i)\Big) \Big/ \begin{smallmatrix} F(\alpha)(x_i) \sim x_j \\ \forall \alpha: i\to j,\ x_i \in F(i) \end{smallmatrix}$$

$\blacksquare$

Definition
~~Korollar~~ 6.34 Sei $I \xrightarrow{F} \mathcal{C}$ ein Funktor, ~~[illegible]~~ $\Phi: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktor.
Wir sagen, dass Φ einen (Ko)limit von F erhält, falls die kan. Abbildungen

$$\Phi(\operatorname{colim}_I F) \longrightarrow \Phi(F(i)) \quad \text{(welche einen Kegel von } \Phi\circ F \text{ bilden)}$$

ein Kolimit von $\Phi\circ F$ sind. (Wissen wir, dass $\Phi\circ F$ einen Kolimit besitzt, so existiert nach univ. Eigenschaft eine eindeutige Abbildung

$$\operatorname{colim}_I \Phi\circ F \longrightarrow \Phi(\operatorname{colim}_I F)$$ und Φ erhält colim_I falls diese Abbildung ein Isomorphismus ist)

analog für Limits: falls die kan. Abbildungen

$$\Phi(F(i)) \longrightarrow \Phi(\lim_I F) \quad \text{einen Limit von } \Phi\circ F \text{ bilden}$$

so sagen wir Φ erhält den Limit von F.
(wieder: existiert a priori ein Limit von $\Phi\circ F$ ist dies äquiv. dazu, dass die kan. Abb. $\Phi(\lim_I F) \longrightarrow \lim_I \Phi\circ F$ ein Isom. ist).

Korollar 6.35 Ist $F: I \to \mathcal{C}$ ein Funktor und $X\in\mathcal{C}$
so gilt $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \lim_I F) \xrightarrow{\cong} \lim_I \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, F(i))$, also $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-): \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ erhält Limits.
genauso gilt $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\operatorname{colim}_I F, X) \longleftrightarrow \lim_I \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(F(i), X)$
also $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X): \mathcal{C} \to \mathrm{Set}^{op}$ erhält Kolimits.

Bem: Ist $I \xrightarrow{F} \mathcal{C}$ ein Funktor, so gilt: $\underset{\text{Objekt von } \mathcal{C}}{\operatorname{colim}_I F} \cong \underset{\text{Objekt von } \mathcal{C}^{op}}{\lim_{I^{op}} F^{op}}$
(vgl. universelle Eigenschaften).

Beweis: Vergleiche die universelle Eigenschaft von $\lim_I F$ mit der Beschreibung von Limits in Set aus 6.31 $\blacksquare$

Satz 6.36 Sei $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Linksadjungierter. Dann erhält F alle Kolimits. Ist $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ ein Rechtsadjungierter, so erhält G alle Limits.

Beweis: ~~??~~ ist das folgende: sei $\alpha: I \to \mathcal{C}$ ein Funktor und $\{\alpha(i) \xrightarrow{\beta_i} \operatorname{colim}_I \alpha\}$ ein Kolimit von α und $y \in \mathcal{D}$ ein Objekt.

Es muss gelten:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(\operatorname{colim}_I \alpha), y) \arrow[r, "F(\beta_i)", "\cong"'] \arrow[d, "\cong"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & \lim_I \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(\alpha(i)), y) \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\operatorname{colim}_I \alpha, G(y)) \arrow[r, "\beta_i"'] & \lim_I \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\alpha(i), G(y))
\end{tikzcd}$$

analog für Limits und Rechtsadjungierte (wir benutzen hier, dass ein natürlicher Isomorphismus von Funktoren einen Isom. auf Limits induziert) $\square$

Korollar 6.38 Die Kategorien CRinge, Ringe, Ab, Gruppen, Monoide sind vollständig und die Vergissfunktoren nach Set erhalten ~~diese~~ Limits.

Beweis: Sei $\mathcal{C}$ eine der obigen Kategorien und $\mathcal{C} \xrightarrow{V} \mathrm{Set}$ der Vergissfunktor.
~~Sei~~ Dieser hat immer Linksadjungierte, z.B. $X \in \mathrm{Set} \mapsto F(X)$ freie Gruppe, $\bigoplus_X \mathbb{Z}$ (freie abelsche Gruppe), $\mathbb{Z}[X] \in \mathrm{CRing}$ der Polynomring

ÜA: Finde Linksadjungierte zu Ringe $\to$ Set und Monoide $\to$ Set.

$\therefore$ die Vergissfunktoren erhalten also Limits.

Sei nun $I \xrightarrow{F} \mathcal{C}$ ein Funktor. Dann ist $V(\lim_I F) \cong \lim_I V(F) \subseteq \prod_{i \in I} V(F)$.

Produkte von CRingen, Ringen, Ab, Gruppen, Monoide sind wieder solche Objekte (alle Operationen punktweise). dann rechnet man nach, dass die Teilmenge $\lim_I V(F)$ ein Unter(CRing, Ring, Ab, Gruppe, Monoid) ist welcher die korrekte univ. Eigenschaft hat (dies benutzt, dass die Abbildungen ~~für welche~~ $V(F(\alpha)): V(F(i)) \to V(F(j))$ welche in der Def. von $\lim_I V(F)$ auftauchen Abbildungen von (CRing, Ring, Ab, Gruppen, Monoide) sind. $\square$

Satz 6.37 Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Hat $\mathcal{C}$ kleine Koprodukte und Koequalizer, so ist $\mathcal{C}$ covollständig. Hat $\mathcal{C}$ kleine Produkte und Equalizer, so ist $\mathcal{C}$ vollständig. Ist $\mathcal{C}$ (ko)vollst. und $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktor, sodass F kleine (Ko)produkte und (Ko)equalizer erhält, so erhält F alle kleinen (Ko)Limits

<u>Beweis:</u> Sei I klein, $F : I \to \mathcal{C}$ Funktor.

Betrachte $\operatorname{Coeq}\Big(\coprod_{\substack{i,j \in \mathrm{Ob}(I) \\ \alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(i,j)}} F(i) \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightrightarrows}} \coprod_{k \in \mathrm{Ob}(I)} F(k) \Big)$

wobei φ bestimmt ist durch: $\cancel{F(i) \xrightarrow{\alpha} \coprod_{\alpha \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})} \ldots}$

für $\alpha \in \mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ ist $\varphi|_{F(i)}$ gegeben durch $F(i) \xrightarrow{F(\alpha)} F(j) \hookrightarrow \coprod_{k \in \mathrm{Ob}(I)} F(k)$

während $\psi|_{F(i)}$ gegeben ist durch $F(i) \hookrightarrow \coprod_{k \in \mathrm{Ob}(I)} F(k)$

Dann hat $\operatorname{Coeq}(\ldots)$ wie oben die universelle Eigenschaft von $\operatorname{colim}_I F$.
Dies zeigt auch, dass falls $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ (kleine) Koprodukte und Coequalizer erhält, dann auch alle (kleinen) Colimits.
Die Aussage zu Produkten und Equalizern geht genauso (oder man wendet obiges auf $\mathcal{C}^{op}$ an und benutzt Bem. S. 106 unten).

<u>Satz 6.10.</u> Angenommen I klein, $\mathcal{C}$ Kategorie und $\mathcal{C}$ hat Kolimites für alle Funktoren $I \to \mathcal{C}$. Dann definiert die Zuordnung $F \mapsto \operatorname{colim}_I F$ einen Funktor $\operatorname{colim}_I : \mathrm{Fun}(I, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ welcher linksadjungiert ist zu dem konstanten Funktor

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\text{const}} \mathrm{Fun}(I, \mathcal{C}).$$
$$X \longmapsto (i \mapsto X)$$

Analog: existiert $\lim_I F$, so gibt es einen Funktor $\lim_I : \mathrm{Fun}(I, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ welcher rechtsadjungiert ist zu const.

<u>Beweis:</u>