§ Kategorientheorie

Definition 6.1 Eine KATEGORIE $\mathcal{C}$ besteht aus folgenden Daten

- einer Klasse $ob(\mathcal{C})$ deren Elemente die OBJEKTE von $\mathcal{C}$ genannt werden
- für je zwei Objekte $X, Y \in ob(\mathcal{C})$ eine Menge $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ deren Element MORPHISMEN von X nach Y genannt werden
- für je drei Objekte $X, Y, Z \in ob(\mathcal{C})$ eine Abbildung
$$Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \xrightarrow{\circ} Hom_{\mathcal{C}}(X,Z)$$
$$(g,f) \longmapsto g \circ f$$
welche Komposition von Morphismen genannt wird
- für jedes Objekt $X \in ob(\mathcal{C})$ ein Element $id_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X,X)$ welches die Identität von X genannt wird.

Diese Daten müssen folgende Axiome erfüllen:

- $\forall f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ gilt $id_Y \circ f = f = f \circ id_X$ (Unitalität)
- $\forall f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y),\ g \in Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z),\ h \in Hom_{\mathcal{C}}(Z,W)$ gilt
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$
(Assoziativität)

Definition 6.2 a) ein Morphismus $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt ISOMORPHISMUS falls $\exists g \in Hom_{\mathcal{C}}(Y,X)$ sd. $f \circ g = id_Y$, $g \circ f = id_X$

b) zwei Objekte X, Y heißen ISOMORPH falls es einen Isomorphismus $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ gibt.

Bemerkung
- Ist $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ so schreiben wir auch $f: X \to Y$.
- ist $f: X \to Y$ ein Isomorphismus, so ist $g: Y \to X$ mit $f \circ g = id_Y$ und $g \circ f = id_X$ eindeutig bestimmt. Wir schreiben dann $g = f^{-1}$.
- Die Relation $X \sim Y$ auf $ob(\mathcal{C})$ gegeben durch $X \sim Y \Leftrightarrow$ X ist isomorph zu Y ist eine Äquivalenzrelation.
Wir nennen die Klasse der Äquivalenzklassen die Klasse der Isomorphietypen von $\mathcal{C}$, geschrieben $\pi_0(\mathcal{C})$
- $Hom_{\mathcal{C}}(X,X)$ ist unter Komposition ein Monoid, es gibt daher höchstens ein Element $\alpha \in Hom(X,X)$ mit $\alpha \circ f = f = f \circ \alpha$ $\alpha = id_X$
(mit anderen Worten, id_X muß man nicht als Teil der Daten fixieren)

Definition 6.3 • Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **KLEIN** falls $ob(\mathcal{C})$ eine Menge ist.

• Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt **ESSENTIELL KLEIN** falls $\pi_0(\mathcal{C})$ eine Menge ist.

Beispiele 6.4 1) Set : $ob(Set)$ = Klasse aller Mengen,
morphismen = Abbildungen von Mengen

2) Gruppen : ob(Gruppen) = Klasse aller Gruppen
morphismen = Gruppenhomomorphismen

3) Ringe : ob(Ringe) = Klasse aller Ringe
morphismen = Ringhomomorphismen

4) K Körper, $Vect_K$: $ob(Vect_K)$ = Klasse aller K-VR
morphismen = K-lineare Abbildungen

5) Top : $ob(Top)$ = topologische Räume
morphismen = stetige Abbildungen

6) Metric Spaces objekt : metrische Räume
morphismen : Isometrien (also $f: M \to M'$, $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$)

7) FinSet : objekte : endliche Mengen
morphismen : Abbildungen von Mengen

8) sei $(P, \leq)$ eine Menge mit transitiver und reflexiver Relation $\leq$.
Definiere eine Kategorie P durch: $ob(P) = P$ und

$$Hom_P(x,y) = \begin{cases} \{*\} & \text{falls } x \leq y \\ \phi & \text{sonst.} \end{cases}$$

9) sind $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien so definieren

$$ob(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = ob(\mathcal{C}) \times ob(\mathcal{D})$$

$$Hom_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((x,y),(x',y')) = Hom_{\mathcal{C}}(x,x') \times Hom_{\mathcal{D}}(y,y')$$ eine Kategorie $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ (die Produkt Kategorie)

10) ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie so definiert

$ob(\mathcal{C}^{op}) = ob(\mathcal{C})$ $\quad Hom_{\mathcal{C}^{op}}(x,y) = Hom_{\mathcal{C}}(y,x)$, $g \circ_{\mathcal{C}^{op}} f = f \circ_{\mathcal{C}} g$

eine Kategorie $\mathcal{C}^{op}$, die opponierte Kategorie von $\mathcal{C}$.

Beispiel 6.5 Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit $ob(\mathcal{C}) = \{*\}$.

Dann ist $Hom_{\mathcal{C}}(*,*)$ ein Monoid M.

Umgekehrt definiert jeder Monoid M eine Kategorie BM mit

$ob(BM) = \{*\}$, $Hom_{BM}(*,*) = M$, $m \circ_{BM} m' = m \cdot m'$, $id_* = 1_M$.

Es gilt dann $B(M^{op}) = (BM)^{op}$

Def. 6.6: $\mathcal{C}$ Kat. $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ UK, voll, breit.

Definition 6.7: Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien. Ein Funktor $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ besteht aus folgenden Daten:

- einer Zuordnung $F: ob(\mathcal{C}) \to ob(\mathcal{D})$, $X \mapsto F(X)$
- für je zwei Objekte $X, Y \in ob(\mathcal{C})$ eine Abbildung

$$Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)), \quad f \mapsto F(f) = f_*$$

sodass folgende Axiome gelten:

- $F(id_X) = id_{F(X)}$
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

ÜA: $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktor, $X \in \mathcal{C} \Rightarrow$ $Hom_{\mathcal{C}}(X,X) \to Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(X))$ ist ein Monoidhomom.

Beispiele 6.8 0) die Inklusion einer UK

1) es gibt Vergissfunktoren

- Ringe $\longrightarrow$ Gruppen $\longrightarrow$ Mengen
  $(R,+,\cdot) \longmapsto (R,+)$
- Ringe $\longrightarrow$ Monoide
  $(R,+,\cdot) \longmapsto (R,\cdot)$

  Monoide: Kategorie mit Objekten Monoide, Hom = Monoidhom.

- $Vect_K \to Ab \longrightarrow$ Mengen

  Ab: abelsche Gruppen als Objekte, Hom = Gruppenhom.

2) $Vect_K^{op} \xrightarrow{(-)^*} Vect_K$, $V \longmapsto V^* = Hom_K(V,K)$

3) ein Funktor $BG \xrightarrow{F} Set$ ist äquivalent beschrieben durch eine G-Menge $F(*)$: $G = Hom_{BG}(*,*) \longrightarrow Hom_{Set}(F(*), F(*))$ ist die Wirkungsabbildung.

4) ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $X \in \mathcal{C}$ so gibt es Funktoren

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X) : \mathcal{C}^{op} \to \mathrm{Set}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-) : \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$
der von X dargestellte (bzw kodargestellte) Funktor
genauer: für $f: A \to B$ in $\mathcal{C}$ ist

$$f^* = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,X) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,X) \quad \text{und}$$
$$\varphi \longmapsto \varphi \circ f$$

$$f_* = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,B)$$
$$\psi \longmapsto f \circ \psi$$

- sind $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G: \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ Funktoren, so ist
  $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ ein Funktor; $G\circ F(X) = G(F(X))$, $G \circ F(f) = G(F(f))$.
- $id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ist ein Funktor ($id_{\mathcal{C}}(X) = X$, $id_{\mathcal{C}}(f) = f$)

<u>Bemerkung</u>: Sind $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien so ist die Kollektion aller Funktoren $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ im allgemeinen eine Klasse. ABER: sind $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ klein, so ist die Kollektion aller Funktoren $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ eine Menge. Man bekommt also eine Kategorie Cat deren Objekte kleine Kategorien sind und deren Morphismen Funktoren sind.

<u>Lemma 6.9</u> Ist $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor, $f: X \to Y$ ein Isomorphismus so ist auch $F(f)$ ein Isomorphismus.

<u>Beweis</u>: ist f^{-1} das Inverse zu f so gilt

$$F(f^{-1}) \circ F(f) = F(f^{-1} \circ f) = F(id) = id = F(id) = F(f \circ f^{-1}) = F(f) \circ F(f^{-1})$$

und daher ist $F(f^{-1}) = F(f)^{-1}$. ∎

Um zu zeigen, dass zwei Objekte einer Kategorie <u>nicht</u> isomorph sind genügt es also einen Funktor zu finden, unter dem die Objekte auf nicht isomorphe Objekte gehen.

<u>Definition 6.10</u> Seien $F, G: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren. Eine natürliche Transformation $\tau: F \to G$ besteht aus ~~Abbildungen~~ „Morphismen" $\tau_X : F(X) \to G(X)$ in $\mathcal{D}$ sodass für alle Morphismen $f: X \to Y$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "F(f)"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\tau_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$ kommutiert.

<u>Beispiel 6.10</u> • Betrachte den Funktor $Vect_K \xrightarrow{(-)^{**}} Vect_K$, $V \mapsto V^{**}$.

Die kanonischen Abbildungen $V \to V^{**}$, $v \mapsto (f \mapsto f(v))$, $f \in V^*$ bilden eine natürliche Transformation $ev: id_{Vect_K} \to (-)^{**}$.

• Sind $F, F': BG \to Set$ zwei Funktoren zu G-Mengen $M = F(*)$ und $M' = F'(*)$ assoziiert, so ist eine natürliche Transformation $\tau: F \to F'$ gegeben durch: eine einzelne Abbildung
$$M = F(*) \xrightarrow{\tau_*} F'(*) = M', \quad \tau_* =: f$$
welche für alle $g \in G = Hom_{BG}(*,*)$ das Diagram

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & M' \arrow[d, "g"] \\ M \arrow[r, "f"'] & M' \end{tikzcd}$$ kommutieren lässt, also sodass $\forall m \in M$ gilt $f(g \cdot m) = g \cdot f(m)$

Solche Abbildungen von G-Mengen nennen wir äquivariant.

• siehe Übungsblatt ($\det: GL_n \to GL_1 = (-)^\times : BRing \to Groups$)

<u>Definition 6.11</u> Sind $\tau: F \to G$ und $\tau': G \to H$ natürliche Transform. $F, G, H: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$

So bezeichne mit $\tau' \circ \tau$ die Komposition: $(\tau' \circ \tau)_X = \tau'_X \circ \tau_X$. dies ist eine natürliche Transformation. Wir sagen, dass τ ein natürlicher Isom. ist, falls $\exists \tau': G \to F$, sodass $\tau \circ \tau' = id_G$ und $\tau' \circ \tau = id_F$

($\overset{ÜA}{\Longleftrightarrow} \forall X \in \mathcal{C}: \tau_X$ ist ein Isomorphismus).

<u>Definition 6.12</u> Sei $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. F heißt

1) treu, falls $\forall X, Y \in \mathcal{C}$ die Abb. $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \to Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ injektiv ist
2) voll, falls —"— surjektiv ist,
3) volltreu, falls F voll und treu ist
4) konservativ, falls für $f: X \to Y$ in $\mathcal{C}$ sodass $F(f)$ ein Isom. ist folgt, dass

F ein Isomorphismus ist

5) ein Isomorphismus, falls $\exists\, G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ sodass $G \circ F = id_{\mathcal{C}}$ und $F \circ G = id_{\mathcal{D}}$

6) eine Äquivalenz, falls $\exists\, G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ und natürliche Isomorphismen $G \circ F \overset{\varepsilon}{\cong} id_{\mathcal{C}}$ und $F \circ G \overset{\eta}{\cong} id_{\mathcal{D}}$.

7) essentiell surjektiv, falls $\forall Z \in \mathcal{D}\ \exists\, Z' \in \mathcal{D}, X \in \mathcal{C}$ und ein Isomorphismus $F(X) \underset{f}{\cong} Z'$.

<u>ÜA:</u> $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Äquiv. $\Leftrightarrow$ F ist ess. surjektiv + volltreu.

<u>Definition 6.14</u> Ist $\mathcal{C}$ klein, $\mathcal{D}$ Kategorie so besteht die Funktor Kategorie ~~aus~~ $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ aus Objekten = Funktoren $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ und

$$Hom_{Fun(\mathcal{C},\mathcal{D})}(F,G) = \{\text{natürliche Transformationen } \tau: F \to G\} \subseteq \prod_{X \in ob(\mathcal{C})} Hom_{\mathcal{D}}(F(X), G(X)).$$

es ist also $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ($\mathcal{C}, \mathcal{D}$ klein) ein Isom. nach 6.12 $\Leftrightarrow$ F ein Isom. in der Kategorie Cat, und $\tau: F \to G$ ein natürlicher Iso nach 6.11 $\Leftrightarrow$ τ ist ein Isomorphismus in $Fun(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

<u>Beobachtung:</u> Ist $\mathcal{C}$ klein so ist die Zuordnung

$\mathcal{C} \to Fun(\mathcal{C}^{op}, Set)$, $X \mapsto Hom_{\mathcal{C}}(-,X)$ ein Funktor, der <u>YONEDA</u> Funktor

Für <u>jede</u> Kategorie kann man den Funktor

$Hom_{\mathcal{C}}: \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to Set$, $(X,Y) \mapsto Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ betrachten (aber $Fun(\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}, Set)$ ist keine Kategorie...)

und ~~sind~~ $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ klein, ~~so ist~~ so hat man einen Isomorphismus

$$Fun(\mathcal{C} \times \mathcal{D}, \mathcal{E}) \cong Fun(\mathcal{C}, Fun(\mathcal{D}, \mathcal{E})) \quad \text{für alle Kategorien } \mathcal{E}$$
$$F \longmapsto (X \mapsto (Y \mapsto F(X,Y)))$$

<u>Lemma 6.15</u> (Yoneda Lemma) Sei $F: \mathcal{C}^{op} \to Set$ ein Funktor und $X \in \mathcal{C}$.

Dann ist die Abbildung

$$\left\{\begin{matrix}\text{Nat. Transformationen} \\ \tau: Hom_{\mathcal{C}}(-,X) \to F\end{matrix}\right\} \longrightarrow F(X)$$
$$\tau \longmapsto \tau_X(id_X)$$

eine Bijektion. Insbesondere gilt

$$\left\{\begin{matrix}\text{Nat. Transform.} \\ Hom_{\mathcal{C}}(-,X) \to Hom_{\mathcal{C}}(-,Y)\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\cong} Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$$

<u>Beweis:</u> die Umkehrabbildung sendet $x \in F(X)$ auf die folgende natürliche Transformation τ_x:

$$\tau_{x,Y}: Hom_{\mathcal{C}}(Y,X) \longrightarrow F(Y)$$
$$f \longmapsto F(f)(x)$$

um zu sehen, dass dies eine natürliche Transformation ist, betrachte $\varphi: Y \to Y'$ und das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y', X) \arrow[r, "\tau_{X,Y'}"] \arrow[d, "\varphi^*"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & F(Y') \arrow[d, "F(\varphi)"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \arrow[r, "\tau_{X,Y}"'] & F(Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & F(f)(\alpha) \arrow[d, mapsto] \\ f\circ\varphi \arrow[dr, mapsto] & F(\varphi)(F(f)(\alpha)) \\ & F(f\circ\varphi)(\alpha) \arrow[u, phantom, "\parallel"] \end{tikzcd}$$

$\leftarrow F: \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{S}et$ Funktor

□

Korollar 6.16 Seien $X, Y \in \mathcal{C}$ Objekte. Dann ist jeder Isomorphismus zwischen $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)$ und $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,Y)$ induziert von einem Isomorphismus zwischen X und Y. □

Bemerkung:
- durch anwenden von 6.14 & 6.15 auf $\mathcal{C}^{op}$ statt $\mathcal{C}$ bekommt man analoge Aussagen für $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-)$ und Funktoren $F: \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$.
- ist $\mathcal{C}$ klein, so folgt aus 6.15, dass der Yoneda Funktor $\mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{op}, \mathcal{S}et)$ volltreu ist. Man spricht daher üblicherweise von der Yoneda Einbettung $\mathcal{C} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{op}, \mathcal{S}et)$. (ÜA)

Adjunktionen

Definition 6.17 Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien. Eine Adjunktion besteht aus einem Triple (F, G, α) wobei $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ Funktoren sind, $\alpha: \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-),-) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(-)) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to \mathcal{S}et$ ein natürlicher Isomorphismus ist. F heißt dann linksadjungiert (zu G) und G rechtsadjungiert (zu F)

- für $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ heißt ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ rechtsadjungiert zu $Y \in \mathcal{D}$ unter F falls es einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-), Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) \text{ gibt.}$$

(mit anderen Worten, falls $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-), Y)$ darstellbar ist als Funktor $\mathcal{C}^{op} \to \mathcal{S}et$

Bsp: ist G rechtsadjungiert zu F, so ist für $Y \in \mathcal{D}$ das Objekt $G(Y) \in \mathcal{C}$ rechtsadjungiert zu Y unter F. Umgekehrt hat man:

Lemma 6.~~18~~ Ein Funktor $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ hat einen rechtsadjungierten $G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$
$\iff$ $\forall Y\in\mathcal{D}$ $\exists X\in\mathcal{C}$ rechtsadjungiert zu Y unter F.

Beweis: "$\Rightarrow$" klar (Bsp)
"$\Leftarrow$" Wir argumentieren zunächst den Fall $\mathcal{C},\mathcal{D}$ klein.

Dann betrachte den Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-),-):\mathcal{C}^{op}\times\mathcal{D}\to Set$

äquivalent als Funktor $\mathcal{D}\to Fun(\mathcal{C}^{op},Set)$
$y\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-),y)$.

volle UK auf den Funktoren, welche darstellbar sind.

Nach Voraussetzung hat dieser Funktor eine Faktorisierung

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "S"] & Fun(\mathcal{C}^{op},Set)^{rep} \arrow[d, shift left, "\exists \text{ inverse } t"] & \subseteq Fun(\mathcal{C}^{op},Set) \\ & \mathcal{C} \arrow[u, shift left, "h=\text{Yoneda}", "\simeq"'] & \end{tikzcd}$$

und man kann die Composition $G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ betrachten. $(G=t\circ S)$

man hat also, dass $h\circ t$ isomorph zu $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ ist, sagen wir

$\alpha: h\circ t\to \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ ist ein natürlicher Isomorphismus. Dann ist

$\alpha\circ S: h\circ t\circ S\to S$, gegeben durch $(\alpha\circ S)_y = \alpha_{S(y)}:(h\circ t)(S(y))\to S(y)$

ein natürlicher Isomorphismus (Äquiv. beschreibung von 6.11)

aber $h\circ t\circ S=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,G(-))$ und $S=\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-),-)$.

Im allgemeinen beobachten wir, dass man immer die Kategorie $Fun(\mathcal{C}^{op},Set)^{rep}$ hat und diese immer äquivalent (via Yoneda) zu $\mathcal{C}$ ist. Unter den Voraussetzungen des Lemmas kann man also $\mathcal{D}\xrightarrow{S} Fun(\mathcal{C}^{op},Set)^{rep}\underset{h}{\overset{t}{\rightleftarrows}}\mathcal{C}$ betrachten und das gleiche Argument geht durch. $\blacksquare$

Beispiele 6.~~19~~ 1) Die (volle) Inklusion Gruppen $\overset{i}{\subseteq}$ Monoide hat einen rechtsadjungierten: nach Bsp 1.6 b) kann man zu $M\in$ Monoide $M^\times\in$ Gruppen betrachten, die kan. Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{\text{Gruppen}}(G,M^\times)\to\mathrm{Hom}_{\text{Monoide}}(iG,M)$$

zeigt, dass $\mathrm{Hom}_{\text{Monoid}}(i(-),M)$ darstellbar ist (durch $M^\times$)
nach 6.17 ist die Zuordnung $M\mapsto M^\times$ ein Funktor, welcher rechtsadjungiert zu i ist.

2) der Vergissfunktor Ringe $\xrightarrow{V}$ Mengen hat einen Linksadjungierten:
dual zu 6.17 wollen wir hier sehen, dass für $M \in$ Mengen,
der Funktor $\mathrm{Hom}_{\text{Mengen}}(M, V(-))$ darstellbar ist.

Wir benutzen dann, dass der Polynomring $\mathbb{Z}[M]$ erfüllt
$\mathrm{Hom}_{\text{Ring}}(\mathbb{Z}[M], R) \cong \mathrm{Hom}_{\text{Mengen}}(M, V(R))$ ← natürlich in R, somit ist die Zuordnung
$M \mapsto \mathbb{Z}[M]$ linksadjungiert zu $R \mapsto V(R)$.

3) die ~~Vergissfunktor~~ Inklusion Körper $\xrightarrow{i}$ Integritätsbereiche
hat einen Linksadjungierten $R \mapsto Q(R)$:
nach Konstruktion und Bemerkung S. 26/27
gilt $\mathrm{Hom}_{\substack{\text{Ringe} \\ \text{Integritäts-} \\ \text{bereiche}}}(R, iK) \cong \mathrm{Hom}_{\text{Körper}}(Q(R), K)$ (natürlich in K)

Objekte wie der Name andeutet, Morphismen = Ringmorphismen (also beides volle UK von Ring)

4) Gruppen $\xrightarrow{\text{vergiss}}$ Mengen hat Linksadjungierten die freie Gruppe auf M:
$\mathrm{Hom}_{\text{Mengen}}(M, V(G)) \cong \mathrm{Hom}_{\text{Gruppen}}(F(M), G)$ (natürlich in G).

5) mehr siehe Übungszettel • (Vergiss G-Mengen $\longrightarrow$ Mengen hat links und rechtsadjungierten)

• für $M \in$ Mengen: $M \times - :$ Mengen $\to$ Mengen hat rechtsadjungierten

<u>Lemma 6.20</u> Eine Adjunktion ist äquivalent beschrieben durch ein Quadrupel $(F, G, \varepsilon, \eta)$ wobei $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, $\varepsilon: FG \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$, $\eta: \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to GF$
wobei ε und η die Dreiecks-Identitäten erfüllen:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(\eta_X)"] \arrow[dr, equal, "\mathrm{id}_{F(X)}"'] & F(GF(X)) \arrow[d, "\varepsilon_{F(X)}"] \\ & F(X) \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} G(Y) \arrow[r, "\eta_{G(Y)}"] \arrow[dr, equal, "\mathrm{id}_{G(Y)}"'] & GFG(Y) \arrow[d, "G(\varepsilon_Y)"] \\ & G(Y) \end{tikzcd}$$

kommutieren.

<u>Beweis:</u> sei (F, G, α) eine Adjunktion wie in 6.17.
definiere $\varepsilon_Y \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FG(Y), Y) \underset{\alpha}{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G(Y), G(Y)) \ni \mathrm{id}_{G(Y)}$
und $\eta_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GF(X)) \underset{\alpha}{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) \ni \mathrm{id}_{F(X)}$

dann sind ε und η natürliche Transformationen (direktes nachrechnen)

Wir zeigen die erste Dreiecksidentität:

zu zeigen ist die Gleichheit:

$$id_{F(X)} = \varepsilon_{F(X)} \circ F(\eta_X) \in Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(X))$$

nach anwenden von α wird dies die Gleichheit

$$\underbrace{\alpha(id_{F(X)})}_{\overset{def}{=}\ \eta_X} = \underbrace{\alpha(\varepsilon_{F(X)} \circ F(\eta_X))}_{=} \in Hom_{\mathcal{C}}(X, GF(X))$$

da $\alpha: Hom(F(-), Z) \cong Hom(-, GZ)$ natürlich ist.

betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\varepsilon_{F(X)} \arrow[r, mapsto, "\text{def. von } \varepsilon"] & id_{GF(X)} \\
Hom(FGF(X), F(X)) \arrow[r, "\alpha", "\cong"'] \arrow[d, "F(\eta_X)^*"] \arrow[dr, phantom, "///"] & Hom(GF(X), GF(X)) \arrow[d, "\eta_X^*"] \\
Hom(F(X), F(X)) \arrow[r, "\alpha", "\cong"'] & Hom(X, GF(X)) \\
\varepsilon_{F(X)} \circ F(\eta_X) \arrow[r, mapsto] & \alpha(\varepsilon_{F(X)} \circ F(\eta_X)) = id_{GF(X)} \circ \eta_X
\end{tikzcd}$$

$= \eta_X$.

umgekehrt, hat man $(F, G, \varepsilon, \eta)$ so betrachte für $X \in \mathcal{C}$, $Y \in \mathcal{D}$ die Abbildung

(1) $Hom_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \xrightarrow{G} Hom_{\mathcal{C}}(GF(X), G(Y)) \xrightarrow{\eta_X^*} Hom_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$.

rechnen liefert: dies ist eine natürliche Transformation zwischen Funktoren $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to Set$. diese Abbildung ist eine Bijektion wie wir gleich zeigen, daher bekommt man einen natürlichen Isom α wie benötigt (siehe 6.12)

wir behaupten, dass die Komposition

(2) $Hom_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \xrightarrow{F} Hom_{\mathcal{D}}(F(X), FG(Y)) \xrightarrow{\varepsilon_{Y*}} Hom_{\mathcal{D}}(F(X), Y)$ Inverse ist.

Wir rechnen eine der beiden Kompositionen aus: Sei $f: F(X) \to Y$.

unter (1) geht f auf $G(f) \circ \eta_X$ und unter (2) geht dies auf

$\varepsilon_Y \circ FG(f) \circ F(\eta_X)$. dies ist die Komposition

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(\eta_X)"] \arrow[dr, "id_{F(X)}"'] & FGF(X) \arrow[r, "FG(f)"] \arrow[d, "\varepsilon_{F(X)}"] & FG(Y) \arrow[d, "\varepsilon_Y"] \\
& F(X) \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

komm. da $\varepsilon: FG \to id_{\mathcal{D}}$ nat. Transformation

nach Dreiecksidentität.

die andere Komposition geht ähnlich, benutzt die andere Dreiecksidentität ☐

Lemma 6.21 Sei (F,G,η,ε) eine Adjunktion. Dann gelten

1) F ist volltreu $\Leftrightarrow$ η ist ein nat. isom.
2) G ist volltreu $\Leftrightarrow$ ε ist ein nat. isom.
3) F (und G) ist eine Äquiv. $\Leftrightarrow$ η und ε sind nat. isom.
4) ist F volltreu und G konservativ (oder F konservativ und G volltreu) so ist F eine Äquivalenz {mit Inverser G}. ~~[illegible]~~

Beweis: 1)

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "(\eta_Y)_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y)) \arrow[d, "\cong", "\alpha\ 6.20"'] \\ & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GF(Y)) \end{tikzcd}$$

kommutiert:

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & F(f) \arrow[d, mapsto] \\ & GF(f)\circ\eta_X \\ & \overset{\eta \text{ natürlich}}{=} \eta_Y\circ f \end{tikzcd}$$

d.h. F volltreu $\Leftrightarrow$ $\forall X\in\mathcal{C}$ $\forall Y\in\mathcal{C}$: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,GF(Y))$

$\overset{\text{Yoneda}}{\Leftrightarrow}$ $\eta_Y : Y \to GF(Y)$ ist Isomorphismus

$\Leftrightarrow$ $\eta : \mathrm{id} \to GF$ natürl. isom.

2) analog.

3) "$\Leftarrow$" klar nach Def. von Äquivalenz

"$\Rightarrow$" F (und G) äquivalenz $\Rightarrow$ F und G volltreu $\overset{1)+2)}{\Rightarrow}$ η und ε nat. isom.

4) nach Annahme ist F volltreu $\overset{1)}{\Rightarrow}$ η äquiv. nach 3) z.z., dass ε eine nat. isom. ist, also dass $\forall Y\in\mathcal{D}$ $FG(Y) \xrightarrow{\varepsilon_Y} Y$ ein Isom ist.

Da G konservativ müssen z.z. $\forall Y\in\mathcal{D}$ $G(FG(Y)) \xrightarrow{G(\varepsilon_Y)} G(Y)$ ein Isom. ist.

betrachte dann das komm. Dreieck

$$\begin{tikzcd} G(Y) \arrow[r, "\eta_{G(Y)}", "\cong"'] \arrow[dr, "\cong", "\mathrm{id}"'] & GFG(Y) \arrow[d, "G(\varepsilon_Y)"] \\ & G(Y) \end{tikzcd}$$

Da F volltreu $\Rightarrow$ $\eta_{G(Y)}$ isom.

$\Rightarrow$ $G(\varepsilon_Y)$ auch isom. ∎

anderer Fall geht genauso. ∎

Korollar (mehr dazu im Tutorium?) 6.22 1) Sei ~~[illegible]~~ $F:\mathcal{E}\to\mathcal{E}'$ linksadj. zu $G:\mathcal{E}'\to\mathcal{E}$ und $\mathcal{C}$ klein. Dann ist $F_*:\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{E})\to\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{E}')$ linksadj. zu $G_*:\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{E}')\to\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{E})$.

2) sei $F:\mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ linksadj. zu $G:\mathcal{C}'\to\mathcal{C}$, $\mathcal{C},\mathcal{C}'$ klein und $\mathcal{E}$ eine Kategorie. Dann ist $G^*:\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{E})\to\mathrm{Fun}(\mathcal{C}',\mathcal{E})$ linksadj. zu $F^*:\mathrm{Fun}(\mathcal{C}',\mathcal{E})\to\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{E})$

Limits und Kolimits

Als Aufwärmdefinition geben wir:

Definition 6.23 Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. $i\in\mathcal{C}$ heißt INITIAL, falls $\forall x\in\mathcal{C}$: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(i,x)$ hat genau ein Element. $t\in\mathcal{C}$ heißt TERMINAL, falls $\forall x\in\mathcal{C}$: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,t)$ hat genau ein Element.
(ÜA: Je zwei initiale / terminale Objekte sind isomorph)

Beispiele 6.24
1) $\mathcal{C} = \mathrm{Set}$: $\emptyset$ ist initial, $\{*\}$ ist terminal
2) $\mathcal{C}$ = Gruppen $\{e\}$ ist initial und terminal
3) $\mathcal{C}$ = Ringe $\mathbb{Z}$ ist initial, $\{0\}$ ist terminal
4) $\mathcal{C} = BG$, $G\neq\{e\}$ hat weder initiales noch terminales Objekt
5) Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie welcher der folgenden partiell geordneten Menge P zugeordnet wird: $P=\{x_0,x_1,y\}$, $x_0\leq y$, $x_1\leq y$. Dann ist y terminal, und es gibt kein initialen Objekt.
6) Ist $t\in\mathcal{C}$ terminal so ist $t\in\mathcal{C}^{op}$ initial und umgekehrt.

Definition 6.24 Seien I und $\mathcal{C}$ Kategorien, $F: I\to\mathcal{C}$ ein Funktor.
Ein Kegel $\bar{F}$ von F besteht aus folgenden Daten:
- ein Objekt $\bar{F}(\infty)\in\mathcal{C}$ zusammen mit Abbildungen $F(i)\xrightarrow{\alpha_i}\bar{F}(\infty)$ für alle $i\in I$

sodass folgende Eigenschaften gelten:
- $\forall\, i\xrightarrow{s} j$ in I kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} F(i) \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, "F(s)"'] & \bar{F}(\infty) \\ F(j) \arrow[ur, "\alpha_j"'] & \end{tikzcd}$$

Eine Abbildung von Kegeln von F, $\bar{F}\to\bar{\bar{F}}$ besteht aus einer Abbildung $\bar{F}(\infty)\xrightarrow{\varphi}\bar{\bar{F}}(\infty)$ sodass $\forall i\in I$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} F(i) \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, "\bar{\alpha}_i"'] & \bar{F}(\infty) \arrow[dl, "\varphi"] \\ \bar{\bar{F}}(\infty) & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Ein Kegel $\overline{F}$ von F heißt ein Kolimit von F, falls folgende universelle Eigenschaft gilt: für jeden Kegel $\overline{F}'$ gilt, dass es eine eindeutige Abbildung $\overline{F} \to \overline{F}'$ gibt.

Wir schreiben dann $\operatorname{colim}_I \overline{F}$ für ein Kolimit von F (falls er existiert). ÜA: je zwei Kolimits sind isomorph.

6.25
Beispiel: Ist $I = \emptyset$ so ist ein Kegel des eindeutigen Funktors $\emptyset \to \mathcal{C}$ einfach ein Objekt von $\mathcal{C}$, und ein Kolimes ist ein initiales Objekt.

Bemerkung: Sei Kegel(F) die Kategorie mit Objekten Kegel über F und Morphismen = Abbildungen von Kegeln im Sinne von 6.24. Dann ist ein Kolimes von F genau ein initiales Objekt von Kegel(F).

Informell denken wir, dass ein Kolimes von $F: I \to \mathcal{C}$ ein Objekt von $\mathcal{C}$ ist, ($\overline{F}(\infty)$) aber es ist wichtig, die Strukturabbildungen $F(i) \to \overline{F}(\infty)$
$\overset{\shortparallel}{\operatorname{colim}_I F}$ (Notation)
als Teil der Daten mit zu betrachten.

6.26
Beispiel: Wir wollen verstehen, was ein Kolimes von $id_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ist:
Zunächst besteht ein Kegel aus $(C, \varphi_X : X \to C)$ sodass $\forall f: X \to Y$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "f"'] & C \\ Y \arrow[ur, "\varphi_Y"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. (*)

Gegeben einen solchen Kegel $(C, \varphi_X : X \to C)$, betrachte $\varphi_C : C \to C$.
Dies liefert eine Selbstabbildung des Kegels $(C, \varphi_X : X \to C)$ denn:
$\forall X \in \mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "\varphi_X"'] & C \\ C \arrow[ur, "\varphi_C"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert (Spezialfall von (*))

Ist nun $(C, \varphi_X : X \to C)$ ein Kolimes $\Rightarrow$ $\exists!$ Selbstabbildung $\Rightarrow$ $\varphi_C = id_C$

Sei nun $f: X \to C$ in $\mathcal{C}$. Dann gilt

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "f"'] & C \\ C \arrow[ur, "\varphi_C = \mathrm{id}_C"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert, also $\Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,C) = \{\varphi_X\}$.
und somit ist C terminal.

Beispiel 6.27 1) Sei I eine diskrete kleine Kategorie (nur Identitäten als Morphismen). Dann ist ein Funktor $I \xrightarrow{F} \mathcal{C}$ gegeben durch eine Abbildung $ob(I) \to ob(\mathcal{C})$, $i \mapsto X_i \in \mathcal{C}$. Ein colimit von F ist dann ein Objekt $\coprod_{i \in I} X_i$ (genannt ein Koprodukt) mit Abbildungen $X_i \xrightarrow{\alpha_i} \coprod_{i\in I} X_i$ sodass für alle Objekte $Y \in \mathcal{C}$ die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\Big(\coprod_{i \in I} X_i, Y\Big) \xrightarrow{\prod \alpha_i^*} \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y)$$

eine Bijektion ist.

zB: Für $\mathcal{C} = Set$, $\{X_i\}_{i \in I}$ Familie von Mengen, so ist $\coprod X_i$ im Sinne von oben gegeben durch die disjunkte Vereinigung der Mengen X_i (daher die Schreibweise).

Ist $I = \emptyset$ so bekommt man $\coprod_{\emptyset} \emptyset =$ initiales Objekt.

2) Sei I die Kategorie assoziiert zu der partiell geord. Menge $\{x_0, x_1, y\}$ mit $y \leq x_0$, $y \leq x_1$. Ein Funktor $F: I \to \mathcal{C}$ ist dann äquiv. beschrieben durch zwei Abbildungen $(B \xleftarrow{i} A \xrightarrow{j} C)$ (*) mit $A, B, C \in \mathcal{C}$. Ein Kegel von F ist äquiv. beschrieben durch ein kommutatives Quadrat

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "f"'] & T \end{tikzcd}$$

in $\mathcal{C}$.

Ein Kolimit von F ist dann ein komm. Quadrat

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & B \arrow[d, "t"] \\ C \arrow[r, "s"'] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner"] & C \coprod_A B \end{tikzcd}$$

mit folgender universeller Eigenschaft:

„Zeichen für 'dieses Quadrat ist nicht nur komm. sondern ein Kolimit'"

Gegeben ein (großes) komm. Quadrat $f \circ i = g \circ j$ so existiert eine eindeutige Abb. $\varphi: C \coprod_A B \to T$ welche erfüllt: $\varphi s = g$, $\varphi t = f$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & B \arrow[d, "t"] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\ C \arrow[r, "s"'] \arrow[drr, bend right, "g"'] & C \coprod_A B \arrow[dr, "\varphi\ \exists!"] & \\ & & T \end{tikzcd}$$

man nennt $C \coprod_A B$ ein pushout von (*)

zB für $\mathcal{C} = Set$ ist ein pushout von $B \leftarrow A \rightarrow C$ ist gegeben durch den Quotient von $B \amalg C$ nach der Äquivalenzrelation dass $i(a) \sim j(a)$ für alle $a \in A$.

3) Sei I die Kategorie $\left(\underset{x_0}{\bullet} \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} \underset{x_1}{\bullet} \right)$ mit 2 Objekten x_0 und x_1.

$Hom_I(x_0, x_0) = \{id_{x_0}\}$, $Hom_I(x_1, x_1) = \{id_{x_1}\}$, $Hom_I(x_1, x_0) = \emptyset$, $Hom_I(x_0, x_1) = \{\alpha, \beta\}$

($I = (\Delta_{inj})_{\leq 1}$: Δ_{inj} = Kat. mit • Objekten linear geordnete Mengen $[n] = \{0 \leq 1 \leq \ldots \leq n\}$ für $n \geq 0$

• $Hom_{\Delta_{inj}}([n], [m]) = \{ f : [n] \rightarrow [m] \text{ streng monoton} \}$

$(\Delta_{inj})_{\leq 1}$ volle UK von Δ_{inj} auf den Objekten $\underset{x_0}{\overset{\shortparallel}{[0]}}$ und $\underset{x_1}{\overset{\shortparallel}{[1]}}$)

Ein Funktor $I \xrightarrow{F} \mathcal{C}$ ist also gegeben durch $X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$, zwei Abbildungen von X nach Y in $\mathcal{C}$.

Ein Kolimit über F ist dann ein Objekt C mit Abbildung $Y \xrightarrow{\varphi} C$ sodass $\varphi f = \varphi g$, und sodass $\forall$ anderen Objekte T mit $\psi : Y \rightarrow T$ und $\psi f = \psi g$ eine eind. Abbildung $C \xrightarrow{\Phi} T$ existiert mit $\Phi \varphi = \psi$, also

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & C \arrow[d, "\exists ! \Phi"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & T \end{tikzcd}$$

Man nennt ein Kolimit von $(X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y)$ auch einen Coequalizer $CoEq(f,g)$ von f und g.

zB für $\mathcal{C} = Set$, ist $CoEq(f,g)$ gegeben durch $Y /_{\substack{f(x) \sim g(x) \\ \text{für } x \in X}}$.

Definition 6.28 Seien I und $\mathcal{C}$ Categorien und $F : I \rightarrow \mathcal{C}$ ein Funktor.

Ein Kokegel $\overline{F}$ von F besteht aus einem Objekt $\overline{F}(\infty) \in \mathcal{C}$ zusammen mit Abbildungen $\overline{F}(\infty) \xrightarrow{\beta_i} F(i)$ $\forall i \in I$ sodass die Diagramme

$$\begin{tikzcd} \overline{F}(\infty) \arrow[r, "\beta_i"] \arrow[dr, "\beta_j"'] & F(i) \arrow[d, "F(f)"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & F(j) \end{tikzcd}$$

für alle $f : i \rightarrow j$ in I kommutieren.

Eine Abbildung von Kokegeln $\overline{F} \rightarrow \overline{\overline{F}}$ besteht also eine Abb.

$\overline{F}(\infty) \to \overline{\overline{F}}(\infty)$ sodass $\forall i \in I$ das Diagram

$$\begin{tikzcd} \overline{F}(\infty) \arrow[rr] \arrow[dr, "\beta_i"'] & & \overline{\overline{F}}(\infty) \arrow[dl, "\overline{\beta}_i"] \\ & F(i) & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Ein Limit von F ist dann ein terminales Objekt in der Kategorie Kokegel(F) von Kokegeln von F.

<u>Bsp 6.29</u> Ein Limit von $id_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ist ein initiales Objekt. (ÜA)

<u>Bsp 6.30</u> 1) I diskret, $F: I \to \mathcal{C}$ $\rightsquigarrow$ $\lim\limits_{I} F$ ist geschrieben $\prod\limits_{i\in I} F(i)$ genannt Produkt in $\mathcal{C}$

und man hat $Hom_{\mathcal{C}}(Y, \prod X_i) \xrightarrow{\cong} \prod Hom_{\mathcal{C}}(Y, X_i)$

insbesondere ist das Produkt von Mengen ein Produkt in der Kategorie Set.

2) I = Kategorie $(\bullet \to \bullet \leftarrow \bullet)$ $\rightsquigarrow$ $F: I \to \mathcal{C}$ $\Leftrightarrow$ $(B \xrightarrow{f} A \xleftarrow{g} C)$

Ein Kokegel ist dann ein komm. Diagram

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

und ein Limit von $(B \xrightarrow{f} A \xleftarrow{g} C)$ schreiben wir

$$\begin{tikzcd} B\times_A C \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

und nennen ihn "pullback".

In Set: $B \times_A C = \{(b,c) \in B \times C \mid f(b) = g(c)\}$

3) $I = (\bullet \rightrightarrows \bullet)$ $\rightsquigarrow$ $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$. Ein Kokegel ist

$T \xrightarrow{\varphi} X \rightrightarrows Y$ sd. $f\varphi = g\varphi$ ein Limit von f,g nennen wir Equaliser $Eq(f,g)$.

in Set: $Eq(f,g: X \to Y) = \{a \in X \mid f(a) = g(a)\}$.

<u>Satz 6.31</u> Sei I klein und $F: I \to$ Set ein Funktor. Dann existiert ein Limit von F und ein Kolimit von F. Man sagt Set ist vollständig und kovollständig.

<u>Beweis:</u> ein Limit von F ist gegeben durch: