9. Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 25: (H02T2A4) Gegeben sei die parameterabhängige, skalare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$x'' = \alpha x' - x + x^2 \tag{1}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Tarnsformieren Sie (1) auf ein äquivalentes Differentialgleichungssystem 1. Ordnung der Form

$$\begin{aligned} x' &= f_\alpha(x,y) \\ y' &= g_\alpha(x,y) \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie für alle $\alpha \neq 0$ alle asymptotisch stabilen Ruhelagen dieses Differentialgleichungssystems.

Aufgabe 26: (F05T3A4) Mit reellen Zahlen a, b, c sei

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}$$

Geben Sie für jedes der beiden Differentialgleichungssysteme $y' = Ay$ und $y' = By$ eine Basis des Raumes der Lösungen an. Geben Sie für jedes der beiden Systeme notwendige und hinreichende Bedingungen für die Konstanten a, b, c an, so daß Folgendes gilt:

a) Für alle Lösungen φ ist $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$.

b) Es gibt eine nicht-konstante periodische Lösung.

Aufgabe 27: (F04T2A5) Gegeben sei das autonome System

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x + 2x^3 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

a) Bestimmen und klassifizieren Sie alle Gleichgewichtspunkte von (2).

b) Skizzieren Sie die Trajektorien für das zugeordnete lineare System.

c) Zeigen Sie, daß unter den Trajektorien aus (b) nur diejenige für $t \to \infty$ gegen $(0, 0)$ strebt, für die immer $y = -x$ gilt.

d) Bestimmen Sie die Trajektorien des Systems (2).