4. Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 10: (F21T1A3)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die skalare gewöhnliche Differentialgleichung

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0 \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie alle Lösungen von (1) und bestimmen Sie für alle Lösungen das maximale Existenzintervall.

b) Bestimmen Sie alle Paare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, für die es eine nicht konstante periodische Lösung von (1) gibt.

c) Bestimmen Sie nun die Menge aller maximalen Lösungen von

$$x''(t) - x(t) = te^{-t} \tag{2}$$

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $x(t) = p(t)e^{-t}$ mit einem Polynom höchstens zweiten Grades p, um eine spezielle Lösung zu finden.

Aufgabe 11: (F21T2A3) Auf $]0, \infty[\subseteq \mathbb{R}$ betrachten wir die Differentialgleichung

$$x' = (x - 2)(x + 2)\ln(x)$$

a) Zeigen Sie, daß zu jedem $x_0 > 0$ eine eindeutige maximale Lösung $x : I \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung zu dem Anfangswert $x(0) = x_0$ existiert. Hierbei ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$.

b) Bestimmen Sie alle Anfangswerte, für die die maximale Lösung konstant sind.

c) Bestimmen Sie alle $x_0 > 0$, für die die maximale Lösung $x : I \to \mathbb{R}$ zum Anfangswert $x(0) = x_0$ streng monoton wächst und alle $x_0 > 0$, für die die maximale Lösung zum Anfangswert $x(0) = x_0$ streng monoton fällt.

d) Sei $x_0 := \frac{1}{2}$ und $x :]a, b[\to \mathbb{R}$ die maximale Lösung zu dem Anfangswert x_0. Bestimmen Sie a, b und die Grenzwerte $\lim\limits_{t \searrow a} x(t)$ und $\lim\limits_{t \nearrow b} x(t)$. Für a ist eine Darstellung als Integral ausreichend.

Aufgabe 12: (F21T3A5)
Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = v(x(t)), x(0) = \overline{x} \in \mathbb{R}^2$$

für das gegebene Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$v(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -x_1^5 \\ x_1^4 x_2 + x_1^2 \cos(\frac{1}{x_1}) \end{pmatrix} \qquad \text{für } x_1 \neq 0$$

sowie $v(0, x_2) = 0$ für $x_2 \in \mathbb{R}$.

a) Begründen Sie, daß v stetig ist.

b) Geben Sie die erste Komponente $x_1(t)$ der Lösung $x : I \to \mathbb{R}^2$ explizit an.

c) Zeigen Sie, daß

$$\Gamma = \left\{ \left(r, \frac{1}{r} \sin \frac{1}{r} \right) : r > 0 \right\}$$

die Trajektorie zum Anfangswert $\overline{x} = (\frac{1}{\pi}, 0)$ ist.

d) Begründen Sie, daß alle Fixpunkte von v instabil sind.