3. Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 7: (F21T1A4)
Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

a) Geben Sie alle Lösungen mit maximalem Existenzintervall der Differentialgleichung

$$y'(t) + \frac{2t}{1+t^2} y(t) = g(t)$$

an.

b) Zeigen Sie, daß für jede solche Lösung y dieser Differentialgleichung gilt

$$y(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

wenn $\lim\limits_{t\to\infty} tg(t) = 0$ erfüllt ist.

Aufgabe 8: (F20T2A4)

a) Sei $x_0 \in]0, \pi[$. Zeigen Sie, daß das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = \sin(x), x(0) = x_0$$

eine eindeutig bestimmte globale Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt.

b) Zeigen Sie, daß $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t)$ und $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ existieren und bestimmen Sie diese Grenzwerte.

c) Zeigen Sie, daß es ein $t^* \in \mathbb{R}$ gibt derart, daß x auf $]-\infty, t^*[$ strikt konvex und auf $]t^*, \infty[$ strikt konkav ist.

Aufgabe 9: (H20T2A2)
Es sei $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x^2 - 1|}}{x}$. Weiter sei $\xi > 1$.

a) Zeigen Sie, dass es ein offenes Intervall I_ξ mit $0 \in I_\xi$ gibt, so dass

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = \xi$$

eine eindeutige Lösung $\lambda_\xi : I_\xi \to \mathbb{R}$ auf I_ξ besitzt.

b) Berechnen Sie die Lösung λ_ξ und zeigen Sie damit, dass man immer $[0, \infty[\subseteq I_\xi$ erreichen kann.

c) Geben Sie eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung $\mu_\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems aus (a) an.