2. Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 4: (H11T3A3)
Sei $\begin{array}{rcl} F:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (t,x) & \mapsto & e^{x^2t^2}+t^2 \end{array}$.

a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von F.

b) Bestimmen Sie zu $x_0 \in \mathbb{R}$ alle Lösungen von

$$xt^2x' + t(x^2 + e^{-x^2t^2}) = 0, \quad x(1) = x_0.$$

c) Zeigen Sie, daß jede Lösung aus (b) maximal auf einem beschränkten Zeitintervall existiert und geben Sie das Randverhalten der Lösungen an.

Aufgabe 5: (F15T1A4)
Bestimmen Sie eine reelle Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$y(x)y'(x) + y(x)^2 + 2x + 5 = 0, \quad y(-4) = -2.$$

Wie groß kann das Intervall I maximal gewählt werden?
Hinweis: Eine Möglichkeit der Lösung besteht darin, zunächst einen integrierenden Faktor $u : \mathbb{R} \to]0,\infty[$ zu bestimmen, welcher nur von der Variablen x abhängt. Wir bezeichnen hierbei u als integrierenden Faktor, wenn die Differentialgleichung nach Multiplikation mit u exakt wird.

Aufgabe 6: (H15T3A3) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$f' = f(f-1)(f+1)$$

für eine reellwertige Funktion f in einer reellen Veränderlichen.

a) Zeigen Sie unter Nennung geeigneter Sätze, daß diese Differentialgleichung für jedes $f_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige maximale Lösung f mit $f(0) = f_0$ besitzt.

b) Sei nun $f_0 < 1$. Zeigen Sie, daß für keine reelle Zahl a mit $a > 1$ ein t im Definitionsbereich von f existiert, so daß $f(t) = a$ gilt.

c) Sei $f_0 > 1$. Zeigen Sie, daß für jede reelle Zahl $a > 1$ ein t im Definitionsbereich von f mit $f(t) = a$ existiert.