10. Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 28: (F12T1A2) Drei Fragen zur Funktionentheorie:

a) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\} \to \mathbb{C}$, so daß $f(\frac{1}{2}) = 2$ ist und $|f(z)| = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gilt?

b) Gibt es eine holomorphe Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, so daß für alle $x + iy \in \mathbb{C}$ gilt: $(\operatorname{Im} g)(x + iy) = x^2 - y^2$?

c) Gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{C}$ von 0 und eine holomorphe Funktion $h : U \to \mathbb{C}$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $h^{(n)}(0) = (-1)^n(2n)!$

Aufgabe 29: (F10T2A1) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Entscheiden Sie, ob die folgenden Behauptungen wahr sind. Begründen Sie Ihre Antwort jeweils mit einem kurzen Beweis oder einem Gegenbeispiel

a) Wenn $f(z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ist, dann ist f konstant.

b) Wenn $f(\frac{1}{n}) = \frac{i}{n}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $f(z) = iz$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

c) Wenn f eine nichtkonstante Polynomfunktion ist, dann gibt es eine stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ mit $\int\limits_\gamma f(z)dz = 2\pi i$.

d) Die Funktion $\frac{1}{f}$ hat in 0 keinen Pol.

e) Die Funktion $\begin{array}{rcl}]0,\infty[& \to & \mathbb{C} \\ r & \mapsto & \displaystyle\int\limits_{|z|=r} f(z)dz \end{array}$ ist konstant.

f) Die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(1)(z-1)^n$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 30: (F11T2A1) Geben Sie jeweils alle holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit den angegebenen Eigenschaften an und begründen Sie jeweils, daß es über die von Ihnen angegebenen Funktionen hinaus keine weiteren mit diesen Eigenschaften gibt.

a) $f'(z) = zf(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $f(0) = 1$.

b) $f(f(z)) = z$ für alle $z \in \mathbb{C}$, $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$.