Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 12: (H15T1A4) Es sei $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ eine stetige, matrixwertige Funktion. Betrachten Sie die zugehörige Differentialgleichung

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1}$$

a) Es seien $x_1(t), ..., x_n(t)$, $t \in \mathbb{R}$ Lösungen von (1). Ferner seien für ein $t_0 \in \mathbb{R}$ die Vektoren $x_1(t_0), ..., x_n(t_0)$ im $\mathbb{R}^n$ linear unabhängig. Zeigen Sie, daß dann für alle $t_1 \in \mathbb{R}$ die Vektoren $x_1(t_1), ..., x_n(t_1)$ im $\mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind.
Hinweis: Benutzen Sie das Superpositionsprinzip für lineare homogene Differentialgleichungen oder benutzen Sie die Differentialgleichung für Wronski-Determinanten.

b) Erklären Sie die Begriffe Fundamentalmatrix und Übergangsmatrix (auch Transitionsmatrix oder Hauptfundamentalmatrix genannt). Wie erhält man aus (a) eine Fundamentalmatrix und wie läßt sich die Lösung von (1) mit Anfangswert $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$ mithilfe der Übergangsmatrix ausdrücken?

c) Zeigen Sie: Sind $\Phi_1(t), \Phi_2(t), t \in \mathbb{R}$ Fundamentalmatrizen, so existiert eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$\Phi_1(t) = \Phi_2(t)C, t \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 13: (F12T3A5) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme ein Fundamentalsystem des homogenen Differentialgleichungssystems $x' = Ax$.

Aufgabe 14: (F14T3A5) Es seien $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $b(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$.

b) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = Ax + b(t), x(0) = 0$.

Aufgabe 15: (F19T3A5)

a) Bestimmen Sie die allgemeine reellwertige Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y^{(4)}(x) + y^{(2)}(x) = 0, x \in \mathbb{R},$$

wobei $y^{(k)}$ die $k-$te Ableitung von y bezeichnet.

b) Bestimmen Sie die allgemeine reellwertige Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y^{(4)}(x) + y^{(2)}(x) = 12x + 20\exp(2x), x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 16: (H19T1A4) Sei $\beta \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die homogene Differentialgleichung

$$y'' - 2\beta y' + \beta^2 y = 0$$

b) Bestimmen Sie alle Werte $\beta \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$$

für alle Lösungen $y : \mathbb{R} \to R$ der homogenen Gleichung mit dem jeweiligen Parameter β.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y''(t) - 2\beta y'(t) + \beta^2 y(t) = e^{-2t}.$$

Hinweis zu c): Eine Fallunterscheidung in β ist notwendig,

Aufgabe 17: (H16T1A5) Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x' &= -x^3 + 2x^2y - xy^2 \\ y' &= -2x^3 - y^3 + x^2y + 2y^4 \end{aligned}$$

Bestimmen Sie alle Ruhelagen des Systems und untersuchen Sie diese auf ihre Stabilität.

Aufgabe 19 (F13T1A5) Es sei das autonome System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - y + 3 \\ \dot{y} &= x^2 - 4y - 20 \end{aligned}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie alle stationären Punkte des Systems.

b) Untersuchen Sie die stationären Punkte durch Linearisieren auf Stabilität.

Aufgabe 20: (F10T1A3) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $f(0) = 0$ und $f(r)r > 0$ für alle $r \neq 0$. Zeigen Sie, daß die nichtlineare Schwingungsgleichung

$$x'' + f(x') + x = 0$$

keine periodische Lösung außer $x(t) = 0$ besitzt.
Hinweis: Indirekter Beweis und Multiplikation mit x'.