

**Tutoriumsblatt 9 zu Mathematik III (Physik)**

**Aufgabe 1:**

Es sei  $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$  das Borel-Lebesguemaß auf  $\mathbb{R}$  und  $\delta_{\frac{1}{3}} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$  das Diracmaß zum Punkt  $\frac{1}{3}$ . Sei  $M_0 := [0, 1]$  und für  $n \geq 0$  entstehe  $M_{n+1}$  aus  $M_n$  durch Entfernen aller mittleren Drittel, also

$$\begin{aligned} M_1 &= M_0 \setminus ]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[ = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1] \\ M_2 &= M_1 \setminus \left( ]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[ \cup ]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[ \right) = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1] \\ &\vdots \end{aligned}$$

Berechne  $\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{M_3} d\lambda$  und  $\int_{\mathbb{R}} \text{id}_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{M_3} d\delta_{\frac{1}{3}}$ . Was erhält man allgemein bei  $n \in \mathbb{N}$  für  $\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{M_n} d\lambda$ ?

**Aufgabe 2:**

- a) Sei  $(X, \mathcal{A})$  ein Meßraum  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  meßbar und  $x \in X$ . Zeige, daß für das Dirac-Maß  $\delta_x$  gilt

$$\int_X f d\delta_x = f(x).$$

- b) Zeige, daß die charakteristische Funktion  $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$  von  $\mathbb{Q}$  bezüglich der Borel-Lebesgueschen  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  messbar ist und berechne  $\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}} d\lambda$  mit dem Borel-Lebesguemaß  $\lambda$ .

**Aufgabe 3:** Es sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum. Zeige, daß

$$\begin{aligned} \mu^* : \mathcal{P}(X) &\rightarrow [0, \infty] \\ Q &\mapsto \inf \{ \mu(A) : A \in \mathcal{A}, Q \subseteq A \} \end{aligned}$$

ein äußeres Maß auf  $X$  definiert.