Tutorium 4 zu Mathematik III (Physik)

Aufgabe 1:
Es sei (X, O_X) ein kompakter topologischer Raum, (Y, O_Y) ein hausdorffscher topologischer Raum und $f : X \to Y$ sei stetig und bijektiv. Zeige, daß dann f ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 2:
Zeige oder widerlege:

a) Sind X, Y metrische Räume, $f : B \to Y$ stetig und $B \subseteq X$ beschränkt, so ist $f(B)$ beschränkt.

b) Ist $B \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossen und beschränkt und $f : B \to \mathbb{R}$ stetig, dann besitzt $f(B)$ Infimum und Supremum.

Aufgabe 3:
Zeige, daß die Menge $K := \{(-1)^{n^2}(1 + \frac{1}{n^2}) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{-1, 1\}$ in $\mathbb{R}$ versehen mit der Standardtopologie kompakt ist.