Tutoriumsblatt 12 zu Mathematik III (Physik)

Aufgabe 1:
Es seien Y_1, Y_2, Z Banachräume und $\phi : Y_1 \times Y_2 \to Z$ eine stetige bilineare Abbildung.

a) Zeige, daß $C > 0$ existiert, so daß für alle $y = (y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2$ gilt:

$$||\phi[(y_1, y_2)]|| \leq C||y_1|| \cdot ||y_2||.$$

b) Zeige, daß ϕ in jedem Punkt $b = (b_1, b_2) \in Y_1 \times Y_2$ differenzierbar ist und für alle $y = (y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2$ gilt :

$$\phi'(b)[y] = \phi[(b_1, y_2)] + \phi[(y_1, b_2)].$$

Aufgabe 2:
Es sei $\mathcal{H}$ ein reeller Hilbertraum. Zeige $\begin{array}{rcl} F : \mathcal{H}\backslash\{\mathbf{0}\} & \to &]0, \infty[\\ \varphi & \mapsto & \|\varphi\| \end{array}$ ist differenzierbar und bestimme die Ableitung.

Aufgabe 3:
Es sei λ das Borel-Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$. Zeige, daß $\begin{array}{rcl} f : [-10, \infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^{-x^2} \end{array}$ $\lambda-$integrierbar ist und berechne $\int\limits_{-10}^{\infty} xe^{-x^2} dx$.