

Tutoriumsblatt 10 zu Mathematik III (Physik)**Aufgabe 1:**

Betrachte den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

- a) Berechne für die Funktionenfolge $f_n = \mathbf{1}_{[\frac{5+n}{3}, \frac{7+n}{3}]}$ das Integral $\int_{\mathbb{R}} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n) d\lambda$ und den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$. Warum kommt nicht das gleiche heraus?

- b) Zeige für $g_n = \mathbf{1}_{[-1+\frac{1}{n+1}, 1-\frac{1}{n+1}]} \frac{21(n+1)}{n}$ die Gleichheit

$$\int_{\mathbb{R}} (\lim_{n \rightarrow \infty} g_n) d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g_n d\lambda$$

und berechne diesen Wert.

Aufgabe 2:

Betrachte den Maßraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ mit dem Poissonmaß μ zu einem Parameter $\lambda > 0$ gegeben durch $\mu(\{j\}) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!}$ für jedes $j \in \mathbb{N}$.

Bestimme die Grenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{N}} f_n d\mu$ für die Funktionenfolgen

a) $f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$
 $k \mapsto \exp\left(\frac{i\pi \sqrt[n]{nk}}{2}\right) \cos\left(\frac{k}{n}\right)$

b) $f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
 $k \mapsto -\frac{3}{2} + \sum_{l=0}^n \frac{1}{(k+1)^l}$