Tutorium 1 zu Mathematik III (Physik)

Aufgabe 1:
Sei $A := \{a, b, c\}$ eine dreielementige Menge. Beweise, daß

$$O := \big\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\big\}$$

eine Topologie auf A ist. Finde alle $x \in A$, für welche die Identitätsabbildung zwischen zwei topologischen Räumen

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_A : (A, O) &\to \big(A, \mathcal{P}(A)\big) \\ y &\mapsto y \end{aligned}$$

stetig in x ist.

Aufgabe 2:
Es sei $X := \{\triangleleft, \bigcirc, \triangleright\}$, $Y := \{\blacktriangleleft, \bullet, \blacktriangleright\}$ und $f : X \to Y$ definiert durch $f(\bigcirc) := \bullet$, $f(\triangleleft) := \blacktriangleleft$ und $f(\triangleright) := \blacktriangleright$. Zeige:

$$O_X := \{\emptyset, \{\triangleleft\}, X\}$$

ist eine Topologie auf X und

$$O_Y := \{\emptyset, \{\bullet\}, \{\blacktriangleleft\}, \{\bullet, \blacktriangleleft\}, Y\}$$

eine Topologie auf Y. Zeige weiter:

a) $\bigcirc$ ist ein Häufungspunkt von $\{\triangleleft, \triangleright\}$.

b) (Y, O_Y) ist nicht hausdorffsch.

c) f ist in $\bigcirc$ nicht stetig.

Aufgabe 3:
Versehe $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie und zeige, daß

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} (x+1)^2 & \text{für } x < -1 \\ -x^2 + 1 & \text{für } x \in [-1, 1] \\ 2x & \text{für } x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

in -1 stetig, aber in 1 nicht stetig ist.