Übungsblatt 9 zu Mathematik III für Physik

Aufgabe 124: (10 Punkte) Es sei $\alpha > 0$.

a) Zeigen Sie, dass durch die Bedingung

$$\mu(\{k\}) := \left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}\right) e^{-\frac{k}{\alpha}}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$ definiert wird und zwar

$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}\right) e^{-\frac{k}{\alpha}} \delta_k$$

mit den Diracmaßen δ_k in den Punkten $k \in \mathbb{N}_0$.

b) Betrachten Sie die nichtnegative $\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$-Stufenfunktionen

$$\begin{array}{rcl} f_n : \mathbb{N}_0 & \to & [0, \infty[\\ k & \mapsto & \begin{cases} e^{\frac{k}{\alpha}} & \text{falls } k \leq n \\ 0 & \text{falls } k > n \end{cases} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcl} g_n : \mathbb{N}_0 & \to & [0, \infty[\\ k & \mapsto & \begin{cases} e^{-\frac{k}{\alpha}} & \text{falls } k \leq n \\ 0 & \text{falls } k > n \end{cases} \end{array}.$$

Berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{N}_0} f_n \, d\mu \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{N}_0} g_n \, d\mu.$$

c) Betrachten Sie die positive Funktionen

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N}_0 & \to &]0, \infty[\\ k & \mapsto & e^{\frac{k}{\alpha}} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{N}_0 & \to &]0, \infty[\\ k & \mapsto & e^{-\frac{k}{\alpha}} \end{array}.$$

Berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{N}_0} f \, d\mu \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{N}_0} g \, d\mu.$$

Aufgabe 125: (10 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für alle $y \geq 0$ die Folge $\left(\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton steigend ist.

b) Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to [0, \infty[$ $\mathcal{A}-$meßbar. Berechnen Sie

$$\lim_{n \to \infty} \int_X n \ln\left(1 + \frac{f}{n}\right) d\mu.$$

Aufgabe 126: (10 Punkte)

a) Es sei $(X, \mathcal{A}, \nu)$ ein Maßraum und $f : X \to [0, \infty]$ sei $\mathcal{A}-$meßbar. Zeigen Sie, dass

$$\begin{array}{rcl} \mu : \mathcal{A} & \to & [0, \infty] \\ A & \mapsto & \int_X f \mathbf{1}_A \, d\nu \end{array}$$

ein Maß definiert.

b) Es sei nun konkret $X = \mathbb{Z}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ und ν das Zählmaß. Für

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\longrightarrow [0, \infty] \\ n &\longmapsto e^{-|n|} \end{aligned}$$

sei μ das in a) definierte Maß. Berechnen Sie für

$$\begin{aligned} g : \mathbb{Z} &\longrightarrow [0, \infty] \\ n &\longmapsto \frac{|n|}{2} \end{aligned}$$

das Integral $\displaystyle\int_{\mathbb{Z}} g \, d\mu$.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \frac{1 - (n+1)x^n + n x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung über Moodle abgeben. Abgabe bis Mittwoch 20.12.23, 08:25 Uhr – vor der Übung.