Mathematisches Institut der Universität München 06.12.2023

Übungsblatt 8 zu Mathematik III für Physik

Aufgabe 120: (10 Punkte)

a) Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{R}^n$ mit der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ versehen. $f_1 : X \to \mathbb{R}$ und $f_2 : X \to \mathbb{R}$ seien zwei messbare Abbildungen. Man zeige, dass dann auch $f := (f_1, f_2) : X \to \mathbb{R}^2$ messbar ist. Man zeige weiterhin, dass auch $f_1 + f_2 : X \to \mathbb{R}$ und $f_1 \cdot f_2 : X \to \mathbb{R}$ messbare Abbildungen sind.

b) Man gebe ein Beispiel einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf $\mathbb{R}$ sowie messbaren Funktionen $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, so dass $f_1 + f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht messbar ist.

Aufgabe 121: (10 Punkte) Es seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ hausdorffsche topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung, so dass die Menge

$$U(f) := \{x \in X : f \text{ ist nicht stetig in } x\}$$

eine abzählbare Menge ist. Zeigen Sie, dass f Borel-messbar ist.

Aufgabe 122: (10 Punkte) Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle. Zeigen Sie, dass jede monotone Funktion $f : I \to J$ Borel-messbar ist.

Aufgabe 123: (10 Punkte) Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $\mu(A_1) < \infty, ..., \mu(A_n) < \infty$. Man zeige, dass dann gilt

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le j_1 < ... < j_k \le n} \mu\left(\bigcap_{l=1}^{k} A_{j_l}\right) .$$

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung über Moodle abgeben. Abgabe bis Mittwoch 13.12.23, 08:25 Uhr – vor der Übung.