Übungsblatt 6 zu Mathematik III für Physik

Aufgabe 115: (10 Punkte) Wir betrachten den $\mathbb{C}$-Vektorraum

$$X := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{C} := \left\{ (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : (\,\exists I \subset \mathbb{N}, |I| < \infty : z_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus I) \right\}$$

mit der ℓ_∞-Norm

$$\|(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|z_n\|.$$

Wir definieren

$$T : X \longrightarrow X, \qquad S : X \longrightarrow X.$$

$$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (z_n - z_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \qquad (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \left(\sum_{k=n}^{\infty} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

i) Zeigen Sie, dass $T \in L(X,X)$ aber $S \notin L(X,X)$.

ii) Bestimmen Sie den Kern und die Operatornorm von T und S.

iii) Zeigen Sie, dass $S = T^{-1}$.

Aufgabe 116: (10 Punkte)

i) Seien I eine Indexmenge, $(X,\mathcal{A}), (Y_i,\mathcal{B}_i), i \in I$ Messräume und $f_i : X \to Y_i, i \in I$ Abbildungen. Bestimmen Sie die kleinste (bzgl. Inklusion) σ-Algebra auf X, sodass alle Abbildungen f_i $\mathcal{A} - \mathcal{B}_i$-messbar sind.

ii) Ist $\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{B}_i)$ eine σ-Algebra auf X für alle $I, (X,\mathcal{A}), (Y_i,\mathcal{B}_i), i \in I$?

Aufgabe 117: (10 Punkte) Gibt es eine $\mathcal{A} - \mathcal{B}$-messbare Bijektion $f : X \to Y$ für alle Messräume $(X,\mathcal{A}), (Y,\mathcal{B})$ mit $|X| = |Y| =: n \in \mathbb{N}$ und $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}| =: m \in \mathbb{N}$?

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung über Moodle abgeben. Abgabe bis Mittwoch 29.11.23, 08:25 Uhr – vor der Übung.