Übungsblatt 5 zu Mathematik III für Physiker

Aufgabe 113: (10 Punkte)

i) Zeigen Sie, dass $\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]} : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$ und $\cos|_{[0,\pi]} : [0,\pi] \to [-1,1]$ bijektiv sind.

ii) Wie definieren *Arkussinus* bzw. *Arkuskosinus* als

$$\arcsin := \left(\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]}\right)^{-1} : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$$

bzw.

$$\arccos := \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi].$$

Zeigen Sie, dass

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$$

für alle $x \in [-1,1]$.

Aufgabe 114: (20 Punkte)

i) Betrachten Sie die *Riemannsche Zahlenkugel* $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit der Topologie $\mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{C}}}$, die

$$\mathcal{B}_{\mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{C}}}} := \{D(z,r) : z \in \mathbb{C}, r > 0\} \cup \{\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D(z,r)} : z \in \mathbb{C}, r > 0\}$$

als Basis hat, wobei $D(z,r) := \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < r\}$. Zeigen Sie:

a) ∞ ist ein Berührungspunkt von $\mathbb{C}$,
b) $(\widehat{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{C}}})$ ist kompakt,
c) $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hat keinen Grenzewert für $z \to \infty$.

ii) Betrachten Sie die Einheitssphäre $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ mit der Relativtopologie $\mathcal{O}_{S^2} := \{U \cap S^2 : U \in \mathcal{O}^{\mathrm{std}}_{\mathbb{R}^3}\}$. Wir definieren die *stereographische Projektion* als

$$\begin{aligned} P_N : S^2 &\longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto \begin{cases} \frac{x_1}{1-x_3} + i\frac{x_2}{1-x_3} & \text{, für } x \in S^2 \setminus \{N\} \\ \infty & \text{, für } x = N \end{cases}, \end{aligned}$$

wobei $N := (0,0,1)$. Zeigen Sie, dass P_N ein Homöomorphismus ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass P_N Kreise in der Einheitssphäre, die den Punkt N nicht enthalten, auf Kreise in $\mathbb{C}$ abbildet.

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung über Moodle abgeben. Abgabe bis Mittwoch 22.11.23, 08:25 Uhr – vor der Übung.