

## Übungsblatt 4 zu Mathematik III für Physiker

**Aufgabe 109: (10 Punkte)** Es sei  $(X, d)$  ein kompakter metrischer Raum und  $T : X \rightarrow X$  eine Abbildung mit

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y)$$

für alle  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$ . Zeigen Sie, dass  $T$  genau einen Fixpunkt  $a \in X$  hat. Gilt dieselbe Behauptung, falls  $(X, d)$  nicht kompakt ist?

**Aufgabe 110: (10 Punkte)** Es sei  $d \in \mathbb{N}$  und

$$C_0 := \{f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ stetig, } \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass jede  $f \in C_0$  ein Maximum und ein Minimum besitzt.

**Aufgabe 111: (10 Punkte)** Sei  $X$  ein kompakter metrischer Raum. Sei  $(f_n : X \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$  eine wachsende Folge von reellwertigen stetigen Funktionen, die punktweise gegen eine stetige Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert. Zeigen Sie, dass  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auch gleichmäßig auf  $X$  gegen  $f$  konvergiert.

**Aufgabe 112: (10 Punkte)** Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $U \subseteq X$  offen,  $X \setminus U \neq \emptyset$  und  $\emptyset \neq K \subseteq X$  relativ kompakt in  $U$ . Zeigen Sie, dass  $\text{dist}(\overline{K}, X \setminus U) > 0$ .

**Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung über Moodle abgeben. Abgabe bis Mittwoch 15.11.23, 08:25 Uhr – vor der Übung.**