Übungsblatt 3 zu Mathematik III für Physiker

Aufgabe 106: (10 Punkte) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in [0,1]$ existiert, sodass

$$f(x_0) = \frac{f(0) + f(1)}{2}.$$

Aufgabe 107: (10 Punkte) Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $A_n \subseteq X$. Für $n \in \mathbb{N}$, gelte:

a) $A_n \neq \emptyset$,

b) A_n abgeschlossen,

c) $A_{n+1} \subseteq A_n$,

d) $\delta(A_n) := \left\{ \begin{array}{ll} \sup\{d(x,y) : \ x, y \in A_n\}, & \text{falls } \{d(x,y) : \ x, y \in A_n\} \text{ nach oben beschränkt,} \\ \infty, & \text{sonst,} \end{array} \right\}$
erfüllt $\delta(A_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Zeigen Sie, dass es ein $a \in X$ gibt mit $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{a\}$.

Aufgabe 108: (10 Punkte) Ein topologischer Raum X ist *wegzusammenhängend*, falls für alle $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ gibt. Zeigen Sie:

i) Jeder wegzusammenhängende topologische Raum ist zusammenhängend,

ii) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist wegzusammenhängend,

iii) $\mathbb{R}^2$ ist nicht homöomorph zu $\mathbb{R}$.

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung über Moodle abgeben. Abgabe bis Mittwoch 08.11.23, 08:25 Uhr – vor der Übung.