# Übungsblatt 2 zu Mathematik III für Physiker

**Aufgabe 103: (10 Punkte)**

i) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \frac{1}{8}(1-2x)y - \frac{1}{8}y^2 - x = -\frac{1}{8} \\ \Big(\frac{1}{16}(1-2x)^2 - 1\Big)y + \frac{1}{4}(x-1)y = \frac{1}{16} \end{cases}$$

auf der Menge $M = [-1,1] \times [-1,1]$ genau eine Lösung besitzt, mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes.

ii) Von $(x,y) = (0,0)$ startend, wieviele Iterationen sind notwendig, um sicher zu sein, dass sich die Koordinaten der approximativen und tatsächlichen Lösung um weniger als $10^{-6}$ unterscheiden?

iii) Berechnen Sie die Approximation nach 2 Iterationschritten.

*Hinweis: Verwenden der Maximumsnorm kann die Rechnungen vereinfachen.*

**Aufgabe 104: (10 Punkte)** Bestimmen Sie alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, in denen die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} x^2 + y^6 + x^{30}y^{210} + (xy)^{2310} & \text{, falls } x^2+y^2 \geq 4 \\ e^{-\frac{3}{4-x^2-y^2}} & \text{, falls } 1 \leq x^2+y^2 < 4 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2+y^2)^n}{n!} & \text{, falls } x^2+y^2 < 1 \end{cases}$$

stetig ist.

**Aufgabe 105: (10 Punkte)** $\mathbb{R}$ werde mit der Standardtopologie $\mathcal{O}_\mathbb{R}$ versehen und es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Ringhomomorphismus dh. $f(1) = 1, f(0) = 0$ und $f(w+z) = f(w) + f(z)$, $f(wz) = f(w)f(z)$ für alle $w, z \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $f = \mathrm{id}_\mathbb{R}$ der einzige bezüglich $\mathcal{O}_\mathbb{R}$ stetige Ringhomomorphismus auf $\mathbb{R}$ ist.

**Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung über Moodle abgeben. Abgabe bis Mittwoch 01.11.23, 08:30 Uhr – vor der Übung.**