Mathematisches Institut der Universität München 10.01.2024

Übungsblatt 11 zu Mathematik III für Physik

Aufgabe 130: (15 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$l^2(\mathbb{N}) := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$$

versehen mit

$$\begin{aligned} \langle\cdot,\cdot\rangle_{l^2(\mathbb{N})} : l^2(\mathbb{N}) \times l^2(\mathbb{N}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ ((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) &\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} y_n \end{aligned}$$

einen separablen Hilbertraum bildet.

Aufgabe 131: (15 Punkte) Es sei $\widetilde{\lambda}$ das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow l^2(\mathbb{N}) \\ x &\longmapsto \left(\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(x^2+1)}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

$\widetilde{\lambda}-$integrierbar ist.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_{-N}^{N} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(N) - \arctan(-N).$$

b) Berechnen Sie $\int\limits_{\mathbb{R}} f d\widetilde{\lambda}$.

Hinweis: Definieren Sie die Folge

$$\left(\begin{aligned} h_m : \mathbb{R} &\longrightarrow l^2(\mathbb{N}) \\ x &\longmapsto g_m(x) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, ..., \frac{1}{\sqrt{m(m+1)}}, 0, ...\right) \end{aligned}\right)_{m\in\mathbb{N}},$$

wobei $(g_m : \mathbb{R} \to [0,\infty[)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $\widetilde{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$-Stufenfunktionen mit $0 \le g_m(x) \nearrow \frac{1}{1+x^2}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 132: (10 Punkte) Betrachten Sie die Funktionen

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,x_3) &\longmapsto x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1,x_2,x_3) &\longmapsto 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 14 \end{aligned}$$

und zeigen Sie, dass sie sich im Punkt $a := (1,2,3)$ berühren.

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung über Moodle abgeben. Abgabe bis Mittwoch 17.01.24, 08:25 Uhr – vor der Übung.