Übungsblatt 10 zu Mathematik III für Physik

Aufgabe 127: (10 Punkte) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b, \lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ das Borelmaß auf $\mathbb{R}$. Wir betrachten die Funktionenfolgen $(g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$, die durch

$$
\begin{aligned}
g(x) &:= \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{falls } x > 0 \end{cases}, \\
g_n(x) &:= g(nx), \\
h_n(x) &:= g_n(x-a) \cdot g_n(b-x)
\end{aligned}
$$

definiert werden. Zeigen Sie, dass $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen ist und berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h_n \, d\lambda$.

Aufgabe 128: (15 Punkte) Betrachten Sie das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mu := \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}\right) e^{-\frac{k}{\alpha}} \delta_k$$

auf $\mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$.

a) Sei $f : \mathbb{N}_0 \to [0, \infty[$ eine nicht-negative Funktion. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\int_{\mathbb{N}_0} f \, d\mu = \left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \sum_{k=0}^{\infty} f(k) e^{-\frac{k}{\alpha}}.$$

b) Sei $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion. Wann ist g μ-integrierbar? Falls g μ-integrierbar ist, zeigen Sie, dass dann ebenfalls gilt:

$$\int_{\mathbb{N}_0} g \, d\mu = \left(1 - e^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \sum_{k=0}^{\infty} g(k) e^{-\frac{k}{\alpha}}.$$

c) Sei

$$
\begin{aligned}
h : \mathbb{N}_0 &\longrightarrow]0, \infty[\\
n &\longmapsto \frac{1}{n!}.
\end{aligned}
$$

Zeigen Sie, dass das Integral $\int_{\mathbb{N}_0} h \, d\mu$ konvergiert, und berechnen Sie dessen Wert.

Aufgabe 129: (15 Punkte) Es sei $\lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ das Borelmaß auf $\mathbb{R}$. Berechnen Sie die Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[n]{\cos(x)}\, d\lambda(x)$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-1}^{1} \frac{ne^{x^2}}{1+n^{\frac{3}{2}}}\, d\lambda(x)$.

Frohe Weihnachten und ein schönes Neues Jahr!

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung über Moodle abgeben. Abgabe bis Mittwoch 10.01.24, 08:25 Uhr – vor der Übung.