Übungsblatt 1 zu Mathematik III für Physiker

Aufgabe 99: (10 Punkte) Für $j \in \{1, 2, 3\}$ seien

$$\begin{aligned}
M_1 &:= \left\{re^{i\varphi} \in \mathbb{C} : r \in]0,1[,\ \varphi \in]0, 2\pi/3[\right\},\\
M_2 &:= \left\{re^{i\varphi} \in \mathbb{C} : r \in]0,1[,\ \varphi \in]2\pi/3, 4\pi/3[\cap \mathbb{Q}\right\},\\
M_3 &:= \left\{re^{i\varphi} \in \mathbb{C} : r \in]0,1[\cap \mathbb{Q},\ \varphi \in]4\pi/3, 2\pi[\right\},\\
M &:= M_1 \cup M_2 \cup M_3.
\end{aligned}$$

In der Standardtopologie auf $\mathbb{C}$ bestimme den offenen Kern, den Rand und den Abschluß von M.

Aufgabe 100: (10 Punkte)

a) Beweise, dass die Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ die kleinste (gröbste) Topologie auf $\mathbb{R}$ ist, in welcher für alle $\alpha \in \mathbb{Q}$ die Halbachsen $]-\infty, \alpha[$ und $]\alpha, \infty[$ offen sind.

b) Finde die kleinste (gröbste) Topologie auf $\mathbb{R}$, in welcher alle zweielementige Teilmengen von $\mathbb{R}$, d.h. $\big\{\{x, y\} : x, y \in \mathbb{R},\ x \neq y\big\}$, offen sind.

Aufgabe 101: (10 Punkte)

a) Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum, $U, V \subseteq X$ seien offen mit $U \cap V = \emptyset$. Zeige, daß $\overline{V} \cap U = \emptyset$ gilt.

b) Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum, $U, V \subseteq X$ seien offen mit $U \cap V = \emptyset$. Gilt auch $\overline{V} \cap \overline{U} = \emptyset$?

Aufgabe 102: (10 Punkte) Es seien X und Y Hausdorffräume, $A \subseteq X$, $f : X \to Y$ und $g : X \to Y$ stetig. Zeige: $\begin{aligned} h : X &\to Y \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in A \\ g(x) & \text{für } x \in x \in X \setminus A \end{cases} \end{aligned}$ ist auf der Menge

$$\mathring{A} \cup (X \setminus A)^\circ \cup \{x \in \partial A : f(x) = g(x)\}$$

stetig.

Lösungen in Zweier- / Dreiergruppen anfertigen und je Gruppe eine Lösung über Moodle abgeben. Abgabe bis Mittwoch 25.10.20, 8.30 Uhr – vor der Übung