Übungsblatt 6 zu „Von lokalkonvexen Vektorräumen zu Distributionen “

Aufgabe 21:
Es sei $\emptyset \neq X$ eine Menge und für jedes $x \in X$ sei ein Mengensystem $\mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{P}(X)$ gegeben mit

a) Ist $W \subseteq X$ und gibt es $V \in \mathcal{V}_x$ mit $V \subseteq W$, so gilt $W \in \mathcal{V}_x$.

b) Sind $V_1, ..., V_n \in \mathcal{V}_x$, so ist $V_1 \cap ... \cap V_n \in \mathcal{V}_x$.

c) $x \in V$ für jedes $V \in \mathcal{V}_x$.

d) Ist $V \in \mathcal{V}_x$, so gibt es $W \in \mathcal{V}_x$, so daß für jedes $y \in W$ dann auch $V \in \mathcal{V}_y$ gilt.

Zeige: Dann gibt es genau eine Topologie $\mathcal{O}_X$ auf X, so daß für jedes $x \in X$ das Mengensystem $\mathcal{V}_x$ die Menge aller Umgebungen von x bezüglich $\mathcal{O}_X$ ist. Diese Topologie ist explizit gegeben als

$$\mathcal{O}_X = \{Y \subseteq X : \text{ Für jedes } x \in Y \text{ ist } Y \in \mathcal{V}_x\}.$$

Aufgabe 22:
Es sei X ein $\mathbb{K}-$Vektorraum und $\emptyset \neq \mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein System von Mengen mit

a) Jedes $V \in \mathcal{V}$ ist ausgeglichen und absorbierend.

b) Sind $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$, so existiert $V_3 \in \mathcal{V}$ mit $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$.

c) Ist $V \in \mathcal{V}$, so gibt es $V_1 \in \mathcal{V}$ mit $V_1 + V_1 \subseteq V$.

Zeige: Dann gibt es genau eine Vektorraumtopologie $\mathcal{O}_X$, für die $\mathcal{V}$ eine Nullumgebungsbasis bildet.

Aufgabe 23:
Es sei X ein $\mathbb{K}-$Vektorraum und $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem mit

a) Jedes $V \in \mathcal{V}$ ist absorbierend, konvex und ausgeglichen.

b) Ist $V \in \mathcal{V}$ und $\lambda > 0$, dann ist $\lambda V \in \mathcal{V}$.

Zeige: Dann bildet $\mathcal{V}$ eine Nullumgebungsbasis für eine lokalkonvexe Topologie auf X.

Besprechung am Dienstag 23.1.2024 in der Übung; diese ist in B041