Mathematisches Institut der Universität München 7.12.2023

Übungsblatt 5 zu „Von lokalkonvexen Vektorräumen zu Distributionen "

Wiederholung/Einführung: Da die Translationen $\begin{array}{rcl} T_a:\mathbb{R}^d & \to & \mathbb{R}^d \\ x & \mapsto & x+a \end{array}$ stetig sind, ist für jedes (Borel-)Lebesgue-meßbare $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ und jedes $x\in\mathbb{R}^d$ die Komposition

$$\begin{array}{rcl} \tau_x f:\mathbb{R}^d & \to & \mathbb{C} \\ y & \mapsto & f(x-y)=(f\circ T_x\circ(-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}))(y) \end{array}$$

wieder (Borel-)Lebesgue-meßbar. Ist ferner $g:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ Lebesgue-meßbar, so ist $(\tau_x f)\cdot g$ Lebesgue-meßbar. Falls $(\tau_x f)\cdot g$ für ein $x\in\mathbb{R}^d$ $\widehat{\lambda}^d-$integrierbar ist, dann heißt

$$(f*g)(x):=\int_{\mathbb{R}^d}(\tau_x f)\cdot g d\widehat{\lambda}^d=\int_{\mathbb{R}^d}f(x-y)g(y)d\widehat{\lambda}^d(y) \tag{1}$$

die Faltung von f und g in $x\in\mathbb{R}^d$. Meßbare Funktionen $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ und $g:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ heißen faltbar, wenn für $\widehat{\lambda}^d-$fast alle $x\in\mathbb{R}^d$ die Funktionen $(\tau_x f)\cdot g$ $\widehat{\lambda}^d-$integrierbar sind. In diesem Fall heißt ein Repräsentant von

$$\begin{array}{rcl} f*g:\mathbb{R}^d & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & (f*g)(x) \end{array}$$

die **Faltung** von f und g.

Aufgabe 19: Zeige: Es sei $p\in[1,\infty]$, $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$ und $g\in L^1(\mathbb{R}^d)$, dann sind f und g faltbar und $f*g\in L^p(\mathbb{R}^d)$ mit

$$\|f*g\|_{L^p}\leq\|f\|_{L^p}\cdot\|g\|_{L^1} \tag{2}$$

Aufgabe 20: Zeige: Es sei $p\in[1,\infty]$, $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$ und $g\in L^1(\mathbb{R}^d)$, dann ist

$$f*g=g*f. \tag{3}$$

Besprechung am Dienstag 11.12.2023 in der Übung; diese ist in B041