Mathematisches Institut der Universität München 8.11.2023

Übungsblatt 3 zu „Von lokalkonvexen Vektorräumen zu Distributionen "

Aufgabe 11:
Es sei X ein $\mathbb{K}-$Vektorraum, $c \in]0, \infty$ und $p : X \to \mathbb{R}$ eine Halbnorm. Zeige, daß

$$Y := \{x \in X : p(x) < c\}$$

eine konvexe, absorbierende, ausgeglichene Teilmenge von X ist.

Aufgabe 12: Zeige: Für $\begin{array}{rcl} \eta : [0,\infty[& \to & [0,\infty[\\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+x} \end{array}$ gilt

$$\eta(x) \leq \eta(x+y) \leq \eta(x) + \eta(y) \tag{1}$$

für alle $x, y \in [0, \infty[$.

Aufgabe 13: Es sei X ein $\mathbb{K}-$Vektorraum und $(p_k : X \to \mathbb{R})_{k\in\mathbb{N}}$ eine trennende Folge von Halbnormen auf X. Zeige, daß

$$\begin{array}{rcl} d : X \times X & \to & [0,\infty[\\ (x,y) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{p_k(x-y)}{1+p_k(x-y)} \end{array}$$

eine translationsinvariante Metrik auf X definiert.

Aufgabe 14: Es sei $X = C(\mathbb{R})$.

a) Zeige, daß für $k \in \mathbb{N}$ durch

$$\begin{array}{rcl} p_k : C(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \sup\{|f(x)| : x \in [-k,k]\} \end{array}$$

eine trennende Familie von Halbnormen definiert wird.

b) Es sei d wie in Aufgabe 13. Berechne für

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \max\{0, 1-|x|\} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 100f(x-2) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}(f(x)+g(x)) \end{array}$$

die Abstände $d(\mathbf{0}, f)$, $d(\mathbf{0}, g)$ und $d(\mathbf{0}, h)$ und zeige dadurch, daß $K_d(\mathbf{0}, \frac{1}{2}) = \{f \in C(\mathbb{R}) : d(\mathbf{0}, f) < \frac{1}{2}\}$ nicht konvex ist.

Besprechung am Dienstag 14.11.2023 in der Übung; diese ist in B041