Mathematisches Institut der Universität München 17.10.2023

# Übungsblatt 1 zu „Von lokalkonvexen Vektorräumen zu Distributionen “

**Netze:** Es sei $\emptyset \neq I$ eine gerichtete Menge – dh. $(I, \leq)$ ist geordnet und für alle $i, j \in I$ gibt es ein $k \in I$ mit $i \leq k$ und $j \leq k$. Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum, so heißt eine Abbildung $x : I \to X$, die – in Anlehnung an die Schreibweise für Folge – meist als $(x_i)_{i\in I}$ geschrieben wird ein **Netz**.

- $a \in X$ heißt **Grenzwert** des Netzes $(x_i)_{i\in I}$, – in Zeichen $a = \lim\limits_{i\in I} x_i$ – wenn es für jede Umgebung $U$ von $a$ ein $j = j(U) \in I$ gibt, so daß $x_i \in U$ für alle $i \in I$ mit $i \geq j(U)$ erfüllt ist.
- $a \in X$ heißt **Häufungswert** von $(x_i)_{i\in I}$, genau dann wenn es für jede Umgebung $U$ von $a$ und für alle $i \in I$ ein $j \in I$ mit $j \geq i$ und $x_j \in U$ gibt.

Sind $I$ und $J$ nach rechts gerichtete Mengen, so heißt eine Abbildung $\varphi : I \to J$ **kofinal**, wenn $\varphi$ monoton steigend ist und es für jedes $j \in J$ ein $i \in I$ mit $j \leq \varphi(i)$ gibt.

**Aufgabe 1:** Ist $(X, \mathcal{O})$ ein hausdorffscher topologischer Raum, dann hat jedes Netz $(x_i)_{i\in I}$ in $X$ höchstens einen Grenzwert.

**Aufgabe 2:** Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ und $a \in X$, dann sind äquivalent:

a) $a \in \overline{A}$

b) Es gibt ein Netz $(x_i)_{i\in I}$ in $A$ mit $a = \lim\limits_{i\in I} x_i$.

**Aufgabe 3:** Sind $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, $a \in X$ und $f : X \to Y$ eine Funktion, dann sind äquivalent:

a) $f$ ist stetig in $a$.

b) Für jedes Netz $(x_i)_{i\in I}$ in $X$ mit $a = \lim\limits_{i\in I} x_i$ gilt $f(a) = \lim\limits_{i\in I} f(x_i)$.

**Aufgabe 4:** Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum, $(x_i)_{i\in I}$ ein Netz in $X$ und $a \in X$, dann sind äquivalent:

a) $a$ ist Häufungswert von $(x_i)_{i\in I}$

b) $a \in \bigcap\limits_{i\in I} \overline{\{x_j : j \in I, j \geq i\}}$

c) Es gibt eine gerichtete Menge $J$ und eine kofinale Abbildung $\varphi : J \to I$ mit $a = \lim\limits_{j\in J} x_{\varphi(j)}$.

**Aufgabe 5:**
Ist $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, so sind äquivalent:

a) $X$ ist quasikompakt [1]

b) Ist $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von abgeschlossenen Mengen mit $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \emptyset$, dann gibt es eine endliche Menge $E \subseteq \Lambda$ mit $\bigcap\limits_{\lambda \in E} A_\lambda = \emptyset$.

In diesem Fall gilt für jedes Netz $(A_i)_{i \in I}$ in $\mathcal{P}(X)$ mit nichtleeren abgeschlossenen Mengen $\emptyset \neq A_i \subseteq X$ mit $A_i \subseteq A_j$ für $i, j \in I$ mit $j \leq i$, daß

$$\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$$

ist.

**Aufgabe 6:** Ist $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, dann sind äquivalent:

a) $X$ ist quasikompakt

b) Jedes Netz $(x_i)_{i \in I}$ hat mindestens einen Häufungspunkt.

**Besprechung am Dienstag 24.10.2023 in der Übung; diese ist in B041**

[1] dh.: Zu jeder Familie $U_i, i \in I$ mit $U_i \in \mathcal{O}$ und $\bigcup\limits_{i \in I} U_i = X$ gibt es eine endliche Menge $J \subseteq I$ mit $\bigcup\limits_{i \in J} U_i = X$.