Tutoriumsblatt 8 zu Analysis und Lineare Algebra I

Aufgabe 1: (Komplexe Zahlen)
Im Folgenden soll eine geometrische Intuition für die Dreiecksungleichung gefunden werden.

a) Geben Sie die Dreiecksungleichung für die Komplexen Zahlen an.

b) Gegeben seien die Punkte $z = 1 - i$ und $w = 3i$. Berechnen Sie $|z|, |w|, z + w$ sowie $|z + w|$.

c) Zeichnen Sie die Punkte z und $z + w$ in ein geeignetes Koordinatensystem.

d) Zeichnen Sie das Dreieck, das von z, $z + w$ und dem Ursprung $0 + 0i$ aufgespannt wird. Die Seiten haben die Längen $|z|, |w|$ und $|z + w|$. Ordnen Sie diese Werte den richtigen Seiten zu.

e) Erklären Sie, welche geometrische Bedeutung die Dreiecksungleichung in diesem Kontext hat.

Aufgabe 2: (Konvergenz von Folgen) Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz. Geben Sie ggf. den Grenzwert an und begründen Sie ihre Antwort.

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = 1 + \sqrt{n}$

b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \sqrt[n]{n^3}$

c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = (-1)^n - \frac{1}{n}$

d) $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n = \sqrt[n]{n + \sqrt{n}}$

Aufgabe 3: (Für Interessierte Studierende)
Wir betrachten die rekursiv definierten Folgen

$$a_1 = 0,9 \text{ und } a_{n+1} = 0,9 + 0,1 \cdot a_n.$$

$$b_1 = 7 \text{ und } b_{n+1} = 10 \cdot b_n + 7.$$

Beziehen Sie Stellung zu folgendem Argument:
Im Limes gilt $a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} 0,9 + 0,1 \cdot a_n = 0,9 + 0,1 \cdot a$. Mit Umformung erhält man $a = 1$ was genau der Grenzwert der Folge ist. Analog erhält man $\lim_{n\to\infty} b_n = -\frac{7}{9}$.