Tutoriumsblatt 6 zu Analysis und Lineare Algebra I

Aufgabe 1: Sei G eine endliche Gruppe und $g \in G$ beliebig. Zeige es gibt eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $g^n = e_G$.

Aufgabe 2: Wir betrachten $V = \mathbb{R}^3$ als Vektorraum über dem Körper der rellen Zahlen $\mathbb{R}$.

(i) Zeige, dass es sich bei

$$U = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \qquad \text{und} \qquad W = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$$

jeweils um einen Untervektorraum handelt.

(ii) Bestimme $U \cap W$ konkret.

(iii) Zeige, dass $U \cup W$ kein Untervektorraum ist.

(iv) Schreibe U und $U \cap W$ jeweils als lineare Hülle von möglichst wenig Elementen.

Aufgabe 3: Wir betrachten die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ als geordneten Körper. Beweisen Sie

(i) $\underset{x,y,z \in \mathbb{Q}}{\forall} \quad x \leq y \wedge z \geq 0 \implies xz \leq yz.$

(ii) $\underset{x,y,z \in \mathbb{Q}}{\forall} \quad x \leq y \wedge z \leq 0 \implies xz \geq yz.$

(iii) Beweisen Sie direkt mit Def. 3.4.7 dass für alle $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\frac{4}{3n-2} < \varepsilon$.