Tutorium 5 zu Analysis und Lineare Algebra I

Aufgabe 1: Für $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ wird $n!$ rekursiv definiert durch: $0! := 1$, $1! := 1$ und $(n+1)! := (n+1) \cdot (n!)$ für $n \geq 1$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, 1, ..., n\}$ definiere

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Zeige:

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

b) Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1, ..., n\}$ gilt:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

d) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$$

Aufgabe 2:

a) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} = \binom{n+m+1}{n+1}.$$

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$1 + 2^{(2^n)} + 2^{(2^{n+1})}$$

durch 7 teilbar.

Aufgabe 3: Berechne das Signum von $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.