Tutorium 2 zu Analysis und Lineare Algebra I

Aufgabe 1: Es seien $f : V \to W$ und $g : X \to Y$ Funktionen. Betrachte die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} (f,g) : V \times X & \to & W \times Y \\ (v,x) & \mapsto & (f(v), g(x)) \end{array}$$

und zeige: (f,g) ist genau dann injektiv, wenn f und g injektiv sind.

Aufgabe 2: Es sei $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$ und $\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x+1)^2 \end{array}$. Bestimme

$$f(\{1,3,5\}), f^{-1}(]-1,1]), g(\{0,-1\}), g^{-1}(\{0,-1\}) \text{ und } g^{-1}([0,4]).$$

Aufgabe 3:
Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Für $x_1, x_2 \in X$ schreibe $x_1 \sim x_2$ genau dann wenn $f(x_1) = f(x_2)$ ist. Zeige:

a) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf X.

b) Für jedes $x \in X$ gilt: $[x]_\sim := \{w \in X : w \sim x\} = f^{-1}(\{f(x)\})$.

c) f ist genau dann injektiv, wenn für alle $x \in X$ gilt: $[x]_\sim = \{x\}$.

Bestimme nun die Äquivalenzklassen $[x]_\sim$ für $x = -1, 0, 1$ unter Verwendung der Funktionen

d) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 1 \end{array}$.

e) $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array}$.