Tutoriumsblatt 12 zu Analysis und Lineare Algebra I

(Es ist nicht das Ziel im Tutorium alle Aufgaben zu schaffen. Aufgaben mit $(\star)$ sind für schnelle Studierende oder zur Klausurvorbereitung gedacht)

Aufgabe 1: Bestimmen Sie für die reellen Potenzreihen den Konvergenzradius.

a) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} x^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$

b) $\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 (x-3)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$(\star)$ c) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^k} x^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$(\star)$ d) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k + k^2}{k \cdot 4^k} (x+1)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe 2: Für welche $x \in \mathbb{R}$ (bzw. $x \in \mathbb{C}$ in b)&c)) konvergieren die Reihen?

a) Die Reihen aus Aufgabe 1.

b) Die komplexe Reihe $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(1+i)^k} x^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$(\star)$ c) Die komplexe Reihe $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k} (x-i)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe 3:

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{N} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ endlich und } A \neq \emptyset\}$ eine gerichtete Menge bzgl. $\subseteq$ ist.

b) Wir betrachten das Netz $f : \mathcal{N} \to \mathbb{Q}$ mit $f(A) = \frac{1}{\max(A)}$.
Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten.

Aufgabe 4: (Rechenübungen für Zuhause)
Faktorisieren Sie:

(i) $n^3 + 2n^2 + n$

(ii) $(a+2)^3 - 8(a^2 + 2a)$

(iii) $3^{2m} - 3^{2n+2}$

(iv) $(x^4 - 4) + (x^3 + 2x)$

(v) $nm(n-6) + 9m$

(vi) $x^2 + 2x - 3 + 4y - y^2$