Tutoriumsblatt 11 zu Analysis und Lineare Algebra I

(Es ist nicht das Ziel im Tutorium alle Aufgaben zu schaffen. Aufgaben mit ($\star$) sind für schnelle Studierende oder zur Klausurvorbereitung gedacht)

Aufgabe 1: Entscheiden Sie mit Hilfe des Minoranten (vgl A3) bzw. Majorantenkriteriums, ob die Reihen (absolut) konvergieren.

a) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k + k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

b) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 + 1}{k^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

($\star$) c) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot 2^k}{2 + 5^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

($\star$) d) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k + 2}{\sqrt[k]{k^k + 2^k}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe 2: Wenden Sie das Wurzelkriterium bzw. Quotientenkriterium an, um die Reihen auf absolute Konvergenz zu untersuchen.

a) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{2^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

b) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k \cdot k^2}{3^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

($\star$) c) $\left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{5k^2 + 3k - 2}{(2k+1)^2}\right)^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$

($\star$) d) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(k!)^2}{(k^2)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe 3: Beweisen Sie das sogenannte Minorantenkriterium: Sind $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folgen, sodass $y_k \geq x_k \geq 0$ und konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ nicht, dann kann auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ nicht konvergieren.