Mathematisches Institut der Universität München 18.10.2023

Übungsblatt 1 zu Analysis und Lineare Algebra I

Aufgabe 33: Beweisen Sie, dass

(i) $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\| = |x_1| + 2|x_2| + 3|x_3|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^3$ ist

(ii) $\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \rangle = 4v_1w_1 - v_1w_2 - v_2w_1 + v_2w_2$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ ist.

(iii) für $\mathcal{N} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ endlich}\}$ die Abbildung $d : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ mit $d(A, B) = \mathrm{Kard}(A \setminus B) + \mathrm{Kard}(B \setminus A)$ eine Metrik ist. (Tipp: Aufgabe 16c)

Aufgabe 34: (Pariser Eisenbahn-Metrik)

a) Zeigen Sie, dass $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ mit

$$d(z, w) = \begin{cases} |z - w| & \text{falls } w = 0 \text{ oder es ein } \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } z = \lambda w \text{ gibt} \\ |z| + |w| & \text{sonst} \end{cases}$$

eine Metrik ist.

b) Zeichnen Sie die Menge $B_1(1 + i) = \{z \in \mathbb{C} \mid d(z, 1 + i) < 1\}$.

c) Beweisen Sie, dass die Folge $(1 + i + \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich der Metrik d nicht gegen $1 + i$ konvergiert.

Aufgabe 35: Wir betrachten die Folge in $\mathbb{C}$ mit $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{a_n+i}{|a_n+i|}$.

a) Beweisen Sie, dass $\mathrm{Re}\,(a_n) \in [0, 1]$ und $\mathrm{Im}\,(a_n) \in [0, 1]$.

b) Beweisen Sie, dass $\mathrm{Re}\,(a_{n+1}) \leq \mathrm{Re}\,(a_n)$ und $\mathrm{Im}\,(a_{n+1}) \geq \mathrm{Im}\,(a_n)$.

c) Schließen Sie aus a) und b), dass die Folge konvergiert und geben Sie den Grenzwert an.

Aufgabe 36: (Abstand zwischen Punkt und Gerade)

Wir arbeiten in $\mathbb{R}^3$ mit Standardskalarprodukt und betrachten die Gerade $L = \{A + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ wobei $A, v \in \mathbb{R}^3$ und $v \neq 0$. Außerdem sei $P \in \mathbb{R}^3$ beliebig.

a) Wir betrachten den Punkt $Q = A + \frac{\langle P-A,v\rangle}{\langle v,v\rangle}v$. Berechnen Sie $\langle P - Q, v\rangle$.

b) Zeigen Sie, dass $\|P - Q\|_2 = \min\{\|P - R\|_2 \mid R \in L\}$ gilt.

Tipp: Bei b) kann Satz des Pythagoras hilfreich sein