Übungsblatt 8 zu Analysis und Lineare Algebra I

Aufgabe 29: Begründe, das die Folgen konvergieren und gib jeweils den Grenzwert an.

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{3n^4+2n^2}{(n^2+1)^2}$.

(ii) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = (\frac{1+\frac{10}{n}}{2})^n$.

(iii) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \sqrt[n]{3n-2}$.

Aufgabe 30: Wir betrachten für $a_1 \in]0,1[$ die rekursiv definierte Folge mit

$$a_{n+1} = \frac{1+a_n^2}{1+a_n}.$$

a) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $a_n \in]0,1[$.

b) Zeigen Sie, dass $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

c) Beweisen Sie, dass die Folge konvergiert und geben Sie den Grenzwert an.

Aufgabe 31:

a) Beweisen Sie, dass $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

b) Finden Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $m > n$ mit $\sqrt{m} - \sqrt{n} \geq 1$.

c) Handelt es sich bei $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ um eine Cauchyfolge? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 32: (Interaktion von Potenzen und Limiten)

a) Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir betrachten $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{k^2}$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

b) Wir betrachten die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. Zeigen Sie, dass die Folge bestimmt divergiert.

c) Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse aus a) und b). Warum funktioniert der Beweis aus a) nicht für die Folge in b)?