Übungsblatt 7 zu Analysis und Lineare Algebra I

Aufgabe 25: Entscheide (mit Beweis und direkt mit der ε-Definition), ob die Folgen in $\mathbb{R}$ konvergieren und gib ggf. den Grenzwert an

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{3}{2n}$.

(ii) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = n^2 - 10n$.

(iii) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \frac{n-1}{n^2}$.

Aufgabe 26: Entscheiden Sie für die folgenden Mengen, ob $\max, \min, \inf$ und $\sup$ (in $\mathbb{R}$) existieren und geben sie diese ggf. (mit Begründung) an.

a)
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]5-n, 6+\frac{1}{n}]$$

b)
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]3-n^2, 5+\frac{(-1)^n}{2^n}]$$

Aufgabe 27: Wir definieren für $A, B \subseteq \mathbb{R}$

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Für diese Aufgabe nehmen wir an, dass A und B von oben beschränkt sind. Zeigen sie, dass dann $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Hinweis: Lemma 4.1.5. kann hilfreich sein

Aufgabe 28: Wir betrachten eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$

a) Beweisen Sie, dass falls die beiden Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ beide gegen die gleiche Zahl $a \in \mathbb{R}$ konvergieren, dann bereits $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ folgt.

b) Geben Sie ein Beispiel für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, sodass für jedes $k \geq 2$ die Teilfolge $(a_{k\cdot n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, aber ohne das die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Tipp: Für $k = 2$ ergibt sich also wie in a) die Folge der geraden Folgenglieder. Für $k = 3$ betrachtet man, beginnend mit dem dritten Folgenglied, immer jedes dritte Folgenglied usw.