Übungsblatt 6 zu Analysis und Lineare Algebra I

Aufgabe 21: Beweise oder widerlege, ob es sich bei folgenden Teilmengen um Untervektorräume des $\mathbb{R}^4$ (als $\mathbb{R}$ Vektoraum) handelt:

(i) $\{(a,b,c,d) \mid 4a+3b = 7c-8d\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

(ii) $\{(a,b,c,d) \mid (a-b)(c-d) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

(iii) $\{(a,b,c,d) \mid a = b \text{ und } a+c-b = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

Aufgabe 22: Es sei X eine beliebige nicht leere Menge.
Beweise, dass $\mathrm{Abb}(X,\mathbb{Q}) = \{f : X \to \mathbb{Q}\}$ mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} \oplus : \mathrm{Abb}(X,\mathbb{Q}) \times \mathrm{Abb}(X,\mathbb{Q}) &\to \mathrm{Abb}(X,\mathbb{Q}) \\ (f,g) &\mapsto f \oplus g \\ \odot : \mathbb{Q} \times \mathrm{Abb}(X,\mathbb{Q}) &\to \mathrm{Abb}(X,\mathbb{Q}) \\ (\lambda, f) &\mapsto \lambda \odot f \end{aligned}$$

ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$ ist. Hierbei sind die Funktion $f \oplus g$ und $\lambda \odot f$ durch $(f \oplus g)(x) = f(x) + g(x)$ bzw. $(\lambda \odot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ definiert.

Aufgabe 23: Sei V ein Vektorraum über den Körper K. Wir betrachten zwei Untervektorräume $U, W \subseteq V$. Zeigen Sie, dass $U \cup W$ nur dann ein Untervektorraum von V ist, falls $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$.

Tipp: Bei der spannenden Richtung bietet sich Kontraposition an.

Aufgabe 24: Wir betrachten für $n, k \in \mathbb{N} \in \mathbb{Q}$ den Ausdruck $(\frac{n}{k})^{\frac{1}{n}}$. Zeigen Sie, dass

(i) Für $n < k$ gilt: $(\frac{n}{k})^{\frac{1}{n}} \in \,]0,1[$.

(ii) Für $n \geq k$ gilt: $(\frac{n}{k})^{\frac{1}{n}} \in [1,2[$.