Übungsblatt 5 zu Analysis und Lineare Algebra I

Aufgabe 17: Beweise, dass es sich bei folgenden Teilmengen jeweils um Untergruppen (vgl. Def. 3.1.9.) handelt:

(i) $\{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}$ bzgl. der auf $\mathbb{Z}$ üblichen Addition.

(ii) $\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\} \subseteq \mathbb{Q}$ bzgl. der auf $\mathbb{Q}$ üblichen Multiplikation.

(iii) $\{2^k \mid k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Q}$ bzgl. der auf $\mathbb{Q}$ üblichen Multiplikation.

Hinweis: Es dürfen bekannte Rechenregeln für $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ benutzt werden.

Aufgabe 18: Beweise, dass alle Gruppen mit 4 Elementen kommutativ sind.

Aufgabe 19: Wir betrachten die Gruppen $(\mathbb{Z}, +)$ und $G = \{-1, 1\}$ mit üblicher Multiplikation. Weiter sei $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \to G$ gegeben, wobei $\forall x \in \mathbb{Z}$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \text{ gerade} \\ -1 & \text{wenn } x \text{ ungerade} \end{cases}.$$

a) Zeige, dass es sich bei φ um einen Gruppenhomomorphismen handelt.

b) Gibt es weitere Gruppenhomomorphismen? Gib diese ggf. an und begründe warum es keine weiteren gibt.

Aufgabe 20: Wir betrachten in dieser Aufgabe die Symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_6$

a) Was ist die kleinste Untergruppe von $\mathcal{S}_6$, die die Permutation π enthält, wobei

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

b) Finde zu

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

eine Permutation $s \in \mathcal{S}_6$ mit $s^2 = s \circ s = \sigma$.

c) Gibt es eine Permutation $p \in \mathcal{S}_6$ mit $p^2 = \pi$? Begründe deine Antwort.