Übungsblatt 4 zu Analysis und Lineare Algebra I

Aufgabe 13: Beweise:

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$.

(ii) Der Term $5^n + 7$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch 4 teilbar.

(iii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt: $2^n \geq n + 2$.

Aufgabe 14: (Rekursiv definierte Folgen)

(a) Wir definieren rekursiv die Folge a_n durch $a_1 = 2$ und $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$.
Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{n+1}{n}$.

(b) Wir definieren die Fibonacci-Zahlen durch $F_0 = F_1 = 1$ sowie $F_{n+1} = F_n + F_{n+1}$ für $n \geq 2$. Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$, dass

$$F_0^2 + F_1^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}.$$

Aufgabe 15: Ziel dieser Aufgabe ist es die Kommutativität der Addition auf $\mathbb{N}$ formal zu beweisen. Hierzu sei $N : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{1\}$ die in den Peano-Axiomen beschriebene injektive Nachfolgerfunktion. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei $\varphi_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die nach dem Rekursionssatz durch $\varphi_m(1) = m + 1 = N(m)$ und $\varphi_m \circ N = N \circ \varphi_m$ bestimmte Funktion (vgl. Bemerkung 2.1.10). Zeige:

a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi_1(n) = n + 1 = N(n)$.

b) Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi_m \circ N = \varphi_{m+1}$.

c) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi_m(n) = \varphi_n(m)$.

Aufgabe 16: Im folgenden sind A und B jeweils endliche nicht leere Mengen. Beweise:

a) Sind A und B disjunkt, also $A \cap B = \emptyset$, dann gilt

$$\text{Kard}(A \cup B) = \text{Kard}(A) + \text{Kard}(B).$$

b) Gilt $A \subseteq B$, dann gilt

$$\text{Kard}(B \setminus A) = \text{Kard}(B) - \text{Kard}(A).$$

c) Zeige

$$\text{Kard}(A \cup B) = \text{Kard}(A) + \text{Kard}(B) - \text{Kard}(A \cap B)$$